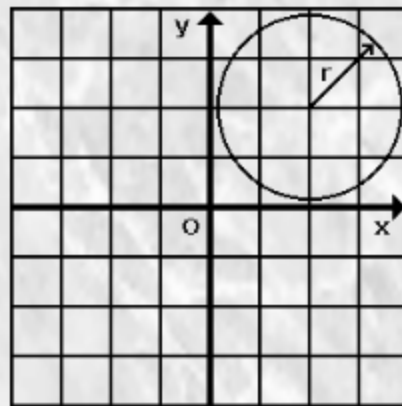


*Initiation rapide*

# Mathématiques

## Topologie



*Claude Turrier*



Du même auteur,

## Éditions Ellipses

COLLECTION TECHNOSUP

- Le son - théorie et technologie (2015)
- Photographie numérique (2013)

COLLECTION DE CLIC EN CLIC

- Créer et retoucher des images avec Illustrator (2009)
- Créer et retoucher des images avec Gimp (2008)
- Photos numériques (2008)
- Initiation à la modélisation et la programmation 3D (2007)

## Sous licence Creative Commons

- Programmer en Scheme avec Gimp (2021)

Mathématiques - Topologie  
IDCTUR13032023  
(c) Claude Turrier (2023)

Le présent livre est gratuit mais n'est pas libre de droits. Il est publié sous les termes de la licence

Creative Commons

Attribution Pas d'Utilisation Commerciale - Pas de Modification  
CC BY-NC-ND



Cette licence n'autorise les autres qu'à télécharger l'œuvre et à la partager tant qu'on la crédite en citant le nom de l'auteur mais on ne peut pas la modifier de quelque façon que ce soit ni l'utiliser à des fins commerciales.

<https://creativecommons.org/licenses/>

# Sommaire

<b>Avant-propos</b>	<b>4</b>
<b>1 Espace topologique</b>	<b>7</b>
<b>2 Parties d'un espace topologique</b>	<b>19</b>
<b>3 Propriétés d'un espace topologique</b>	<b>37</b>
<b>4 Espace métrique</b>	<b>51</b>
<b>5 Espace vectoriel normé</b>	<b>59</b>
<b>6 Espace de Banach</b>	<b>71</b>
<b>7 Espace de Hilbert</b>	<b>81</b>
<b>Index</b>	<b>91</b>

# Avant-propos

La topologie est une branche des mathématiques qui s'est développée à partir de la fin du XIXe siècle, en réponse à des problèmes géométriques et analytiques qui ne pouvaient pas être résolus à l'aide des méthodes traditionnelles de la géométrie euclidienne.

Les origines de la topologie remontent au XVIIIe siècle, avec les travaux de Leonhard Euler sur les ponts de Königsberg, qui ont conduit à la création de la théorie des graphes. Au XIXe siècle, les mathématiciens ont commencé à étudier des objets géométriques plus complexes, tels que les surfaces et les courbes, en utilisant des outils analytiques tels que la géométrie projective et la théorie des fonctions.

C'est à la fin du XIXe siècle que la topologie a pris son essor, avec les travaux de Poincaré, qui a introduit la notion de groupe fondamental pour étudier les propriétés topologiques des surfaces. Il a également développé la théorie de la dimension, qui a permis de comprendre les propriétés des espaces de dimension supérieure.

Au début du XXe siècle, les travaux de Hausdorff et de Urysohn ont conduit à la formalisation de la théorie des espaces topologiques, qui est devenue la branche centrale de la topologie moderne. La théorie des espaces topologiques a permis de généraliser les notions de convergence, de continuité et de limite, en utilisant des notions telles que les ouverts et les fermés.

Au cours du XXe siècle, la topologie a connu de nombreux développements importants, tels que la théorie des fibrés, la théorie de l'homotopie, la cohomologie et la K-théorie topologique. Ces développements ont permis d'étudier des structures topologiques plus complexes, telles que les variétés topologiques et les espaces de Hilbert.

Aujourd'hui, la topologie est une branche importante des ma-

thématiques, qui trouve des applications dans de nombreux domaines scientifiques, tels que la physique, l'informatique, la biologie et l'économie.

### **À qui s'adresse ce livre**

Ce livre s'adresse à ceux qui souhaitent s'initier rapidement, facilement à la topologie et qui sont confrontés à des ouvrages existants trop théoriques pour eux.

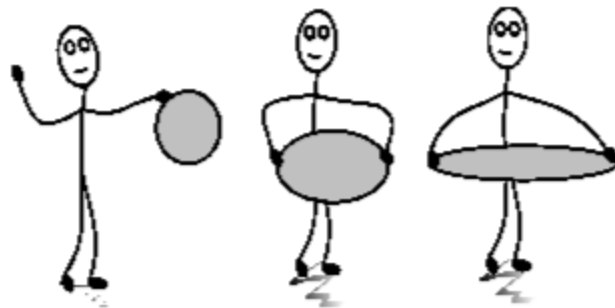
Il s'adresse tout particulièrement aux débutants et aux non spécialistes qui souhaitent pouvoir faire rapidement le tour du sujet, de façon concrète, en allant à l'essentiel sans recherche d'exhaustivité.

Ils pourront utiliser ce livre dans le cadre de leurs études (en mathématiques et en physique) ou de leur activité professionnelle (en informatique, biologie, économie, psychologie) ou par simple curiosité,

La méthode utilisée consiste à présenter les notions importantes de façon rapide, claire et simple et à les illustrer, à l'aide d'exemples et de questions-réponses.

Le dictionnaire définit la topologie comme étant une "branche des mathématiques où on étudie les propriétés invariantes sous l'effet de transformations biunivoques continues".

La topologie est une branche des mathématiques qui étudie les propriétés géométriques des objets qui restent invariantes sous des transformations continues, telles que les déformations et les étirements, sans être déchirées ou collées.



En d'autres termes, la topologie étudie les propriétés des formes qui sont préservées lorsque l'on effectue des transformations continues telles que les pliages, les étirements ou les torsions, sans altérer les propriétés essentielles de la forme.

Par exemple, en topologie, un cercle et un carré peuvent être considérés comme équivalents car ils peuvent être déformés l'un dans l'autre sans qu'il soit nécessaire de les couper ou de les coller.

Cette notion d'équivalence est étudiée en topologie sous le nom d'homéomorphisme.

Les applications de la topologie sont multiples, allant de la géométrie à la physique en passant par l'informatique et la biologie. Par exemple, elle est utilisée en géométrie pour déterminer les propriétés fondamentales des formes, en physique pour la modélisation de l'espace-temps, en informatique pour la compression de données et en biologie pour étudier la forme et la structure des molécules.

### **Objectif**

Le but de ce livre est d'apporter un résumé clair et pratique des éléments importants, à connaître et à savoir utiliser afin d'acquérir facilement et rapidement les bases essentielles de la topologie.

Le lecteur pourra ensuite se tourner plus aisément vers des ouvrages théoriques plus complets, spécialisés et exhaustifs.

Nous vous souhaitons de tout cœur de découvrir de nouveaux horizons et de prendre beaucoup de plaisir en lisant ce livre...

### **Contenu du livre**

Ce livre comprend 7 chapitres :

- les 3 premiers chapitres présentent les concepts généraux et le vocabulaire correspondant rencontrés en topologie.
- les 4 chapitres suivants présentent les principaux types d'espaces importants que l'on rencontre en topologie.
- Un index, situé fin d'ouvrage, permet de retrouver rapidement un sujet particulier.



# Chapitre 1

## Espace topologique

► **Ce qu'il faut savoir**

- 1 - Qu'est ce qu'un espace topologique
- 2 - Espaces topologiques importants

► **Exemples**

► **Questions-réponses**



## Ce qu'il faut savoir

### 1) Qu'est ce qu'un espace topologique ?

En mathématiques, un espace topologique est un ensemble qui est muni d'une structure appelée "topologie". Cette structure permet de définir les notions de proximité, de continuité et de convergence dans cet ensemble.

Soit un ensemble  $E$  et soit  $T$  un ensemble de parties de  $E$ , appelées ouverts de  $E$ . Le couple  $(E, T)$  constitue un espace topologique (et  $T$  est appelée topologie sur  $E$ ) si les trois conditions suivantes sont vérifiées :

- (C1)  $E$  et  $\emptyset$  appartiennent à  $T$ ;
- (C2) Une intersection finie d'éléments de  $T$  appartient à  $T$ ;
- (C3) Une réunion quelconque (finie, infinie dénombrable ou infinie non dénombrable) d'éléments de  $T$  appartient à  $T$ .

Soient :

- $T \subseteq \mathcal{P}(E)$
- $U_i$  des ouverts de  $E$  (c'est à dire des éléments de  $T$ )

On a :

- (C1) :  $E \in T$  et  $\emptyset \in T$
- (C2) :  $(U_i)_{i=1}^k \subset T \Rightarrow \bigcap_{1 \leq i \leq k} U_i \in T$
- (C3) :  $(U_i)_{i \in I} \subset T \Rightarrow \bigcup_{i \in I} U_i \in T$

Les éléments de l'ensemble  $E$  sont appelés "points" et la collection des ouverts de  $T$  définit la façon dont ces points sont "proches" les uns des autres. Si deux points  $x$  et  $y$  de  $E$  sont dans le même ouvert, alors ils sont considérés comme "proches" l'un de l'autre.

Les éléments de  $T$  sont appelés des ouverts de la topologie, et leur complémentaire dans  $E$  sont appelés des fermés.

Une fonction entre deux espaces topologiques est dite continue si elle préserve la topologie, c'est-à-dire si l'image inverse de tout ouvert est un ouvert.



## 2) Topologies importantes

Il existe de nombreux exemples de topologie et d'espaces topologiques en mathématiques. En voici quelques-uns :

### 2.1) Topologie discrète

L'espace topologique discret  $(E, T_{dis})$  est formé par un ensemble  $E$ , constitué d'un nombre (fini ou infini) d'éléments distincts, et par une topologie discrète  $(T_{dis})$  constituée de toutes les parties de  $E$ .

$$E = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$$

$$T_{dis} = \{E, \emptyset, \text{toutes les parties de } E\}$$

### 2.2) Topologie discrète restreinte

L'espace topologique discret restreint  $(E, T_{dir})$  est formé par un ensemble  $E$ , constitué d'un nombre (fini ou infini) d'éléments distincts, et par une topologie discrète restreinte  $T_{dir}$  constituée non pas de toutes les parties de  $E$  mais seulement de certaines parties de  $E$ .

$$E = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$$

$$T_{dir} = \{E, \emptyset, \text{certaines parties de } E\}$$

### 2.3) Topologie grossière

L'espace topologique grossier  $(E, T_{gro})$  est formé par un ensemble  $E$ , quelconque, et par une topologie grossière  $T_{gro}$  constituée uniquement de  $E$  et de l'ensemble vide.

$E$  : ensemble quelconque

$$T_{gro} = \{E, \emptyset\}$$

### 2.4) Topologie triviale

L'espace topologique trivial  $(E, T_{tri})$  est constitué seulement d'un point, considéré comme un ouvert dans la topologie.

$$E = \{a\}$$

$$T_{tri} = \{E, \emptyset\}$$

### 2.5) Topologie usuelle

La topologie usuelle, appelée également topologie euclidienne, est définie à partir de la notion usuelle de distance  $d(x,y)$  entre deux points  $a$  et  $b$ , de l'espace  $\mathbb{R}^n$  des points à  $n$  dimensions, où  $n$  est un nombre entier positif.

$$E = \mathbb{R}^n$$

$$T_{usu} = \{E, \emptyset, \text{ tous les ouverts de } \mathbb{R}^n\}$$

## 2.6) Topologie métrique

Les espaces métriques sont équipés d'une distance, ou métrique, qui permet de mesurer la distance entre deux points. Les exemples célèbres incluent l'espace euclidien et l'espace des suites convergentes.

## 2.7) Topologie de la norme

Les espaces de Banach sont des espaces vectoriels normés complets, c'est-à-dire qu'ils sont équipés d'une norme qui permet de mesurer la taille des vecteurs et qui satisfait certaines propriétés. Les exemples célèbres incluent l'espace des fonctions continues sur un intervalle donné et l'espace des suites convergentes.

## 2.8) Topologie induite par le produit scalaire

Les espaces de Hilbert sont des espaces de Banach qui sont également équipés d'un produit scalaire. Ils sont importants en physique théorique et en analyse fonctionnelle.

## 2.9) Topologie de la convergence uniforme

L'espace des fonctions continues, sur un intervalle ou sur un espace topologique donné, est muni de la topologie naturelle définie par la convergence uniforme ou par la convergence simple. Cet espace est important en analyse, en géométrie et en théorie des équations différentielles.

## 2.10) Topologie quotient

L'espace quotient est obtenu en identifiant certains points d'un espace donné. Par exemple, on peut identifier tous les points d'un cercle qui sont à une distance donnée de son centre, ce qui donne une sphère.

Il existe bien sûr d'autres exemples de topologies et d'espaces topologiques, chacun avec ses propres caractéristiques et applications.



## Exemples

### 1) Topologie discrète

#### 1.1) Topologie discrète restreinte

Soient :

$$E = \{a, b, c, d, e\} \text{ et } T_{dir} = \{E, \emptyset, \{a\}, \{c, d\}, \{a, c, d\}, \{b, c, d, e\}\}.$$

- $T_{dir}$  constitue une topologie sur  $E$  car les trois conditions (C1), (C2) et (C3) ci-dessus sont vérifiées.
- $(E, T_{dir})$  est un espace topologique.
- $E$  est un ensemble doté de la topologie  $T_{dir}$
- Avec cette topologie, les ouverts de  $E$  sont :  $E, \emptyset, \{a\}, \{c, d\}, \{a, c, d\}$  et  $\{b, c, d, e\}$

#### 1.2) Topologie discrète restreinte

Soient :

$$E = \{a, b, c, d, e\} \text{ et } T_{dir} = \{E, \emptyset, \{a\}, \{c, d\}, \{a, c, d\}, \{b, c, d\}\}.$$

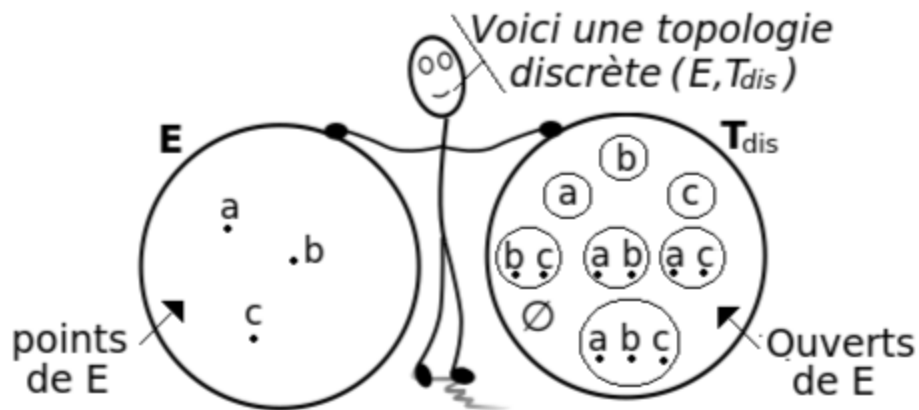
- Ici,  $T_{dir}$  ne constitue pas une topologie sur  $E$  car les trois conditions (C1), (C2) et (C3) ci-dessus ne sont pas vérifiées.
- Par exemple,  $\{a, c, d\} \cup \{b, c, d\} = \{a, b, c, d\}$  n'appartient pas à  $T_{dir}$
- Donc ici,  $(E, T_{dir})$  n'est pas un espace topologique. et  $E$  est un ensemble non doté d'une topologie.

#### 1.3) Topologie discrète

Soient :

$$E = \{a, b, c\} \text{ et } T_{dis} = P(E) \text{ ensemble de toutes les parties de } E.$$

- $T_{dis} = \{E, \emptyset, \{a\}, \{b\}, \{c\}, \{a, b\}, \{a, c\}, \{b, c\}\}.$
- $T_{dis}$  constitue une topologie sur  $E$  car les trois conditions (C1), (C2) et (C3) ci-dessus sont vérifiées.
- $(E, T_{dis})$  est un espace topologique (appelé espace topologique discret)
- $E$  est un ensemble doté de la topologie  $T_{dis}$ .
- Avec cette topologie, les ouverts de  $E$  sont :  $E, \emptyset, \{a\}, \{b\}, \{c\}, \{a, b\}, \{a, c\}$  et  $\{b, c\}$



### 1.4) Topologie grossière

Soient :

$E = \{ a, b, c, d, e \}$  et  $T_{gro} = \{ E, \emptyset \}$ .

- $T_{gro}$  constitue une topologie sur  $E$  car les trois conditions (C1), (C2) et (C3) ci-dessus sont vérifiées.
- $(E, T_{gro})$  est un espace topologique (appelé espace topologique grossier)
- $E$  est un ensemble doté de la topologie  $T_{gro}$ .

## 2) Topologie usuelle

### 2.1) Topologie usuelle sur $\mathbb{R}$

Soient :

$\mathbb{R} = ] - \infty, +\infty[$  et  $T_{usu} = \{ \mathbb{R}, \emptyset, \text{ tous les ouverts de } \mathbb{R} \}$

- $T_{usu}$  constitue une topologie sur  $\mathbb{R}$  car les trois conditions (C1), (C2) et (C3) ci-dessus sont vérifiées.
- $(\mathbb{R}, T_{usu})$  est un espace topologique (appelé espace topologique usuel ou euclidien)
- $\mathbb{R}$  est un ensemble doté de la topologie  $T_{usu}$

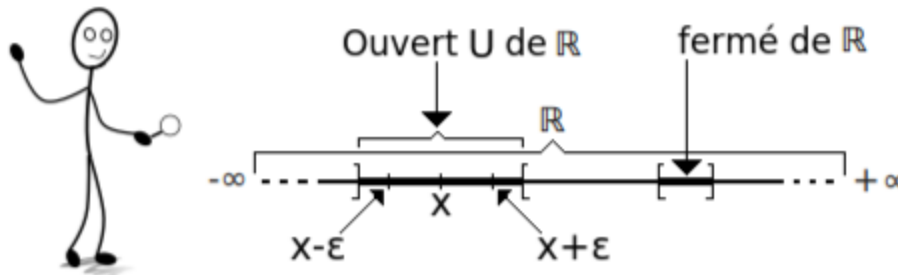
L'ensemble  $\mathbb{R}$  correspond à l'ensemble des points d'une droite. Il est naturellement muni de la topologie usuelle de la droite réelle dans laquelle les ouverts sont définis de la manière suivante :

Un sous-ensemble  $U$  de  $\mathbb{R}$  est dit ouvert si, pour tout  $x$  appartenant à  $U$ , il existe un nombre  $\epsilon > 0$  tel que l'intervalle  $(x - \epsilon, x + \epsilon)$  soit inclus dans  $U$ .

Dit autrement,

$U \subseteq \mathbb{R}$  est un ouvert de  $\mathbb{R} \iff \forall x \in U, \exists \varepsilon > 0$  tel que  $(x - \varepsilon, x + \varepsilon) \subseteq U$

Un sous-ensemble  $F$  de  $\mathbb{R}$  est fermé si son complémentaire  $\mathbb{R} - F$  est ouvert.



### 2.2) Topologie usuelle sur $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$

Soient :

$$\mathbb{R} \times \mathbb{R} = ] - \infty, +\infty[ \times ] - \infty, +\infty[$$

$$T_{usu} = \{ \mathbb{R} \times \mathbb{R}, \emptyset, \text{tous les ouverts de } \mathbb{R} \times \mathbb{R} \}$$

- $T_{usu}$  constitue une topologie sur  $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$  car les trois conditions (C1), (C2) et (C3) ci-dessus sont vérifiées.
- $(\mathbb{R} \times \mathbb{R}, T_{usu})$  est un espace topologique (appelé espace topologique usuel ou euclidien)
- $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$  est un ensemble doté de la topologie  $T_{usu}$ .

L'ensemble  $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$  correspond à l'ensemble des points du plan. Il est naturellement muni de la topologie usuelle du plan réel dans lequel les ouverts sont définis de la manière suivante :

$U \subseteq \mathbb{R} \times \mathbb{R}$  est ouvert si  $\forall (x, y) \in U, \exists r > 0$  tel que  $B_r((x, y)) \subseteq U$

$$B_r((x, y)) = \{ (a, b) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} : \sqrt{(a - x)^2 + (b - y)^2} < r \}$$

$B_r((x, y))$  : "boule" ouverte de rayon  $r$  centrée en  $(x, y)$ .

Un ouvert  $U$  de  $U \subseteq \mathbb{R} \times \mathbb{R}$  peut également être décrit avec la syntaxe suivante :  $U = ]a, b[ \times ]c, d[$  est un carré ouvert de  $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$

### 3) Topologie de la convergence uniforme

Considérons l'ensemble  $E = C(X)$  des fonctions continues sur un intervalle ouvert  $X$  de  $\mathbb{R}$ .

On peut munir  $C(X)$  d'une topologie  $T_{cun}$ , c'est-à-dire d'un ensemble  $T_{cun}$  qui permet de définir les notions d'ouverts et donc de fermés, de limite et de convergence dans  $C(X)$  pour cette topologie.

- $(C(X), T_{\text{cun}})$  est l'espace topologique des fonctions continues sur l'intervalle  $X$  de  $\mathbb{R}$
- $T_{\text{cun}}$  est la topologie sur  $C(X)$  appelée topologie de la convergence uniforme

La topologie  $T_{\text{cun}}$  est définie en prenant comme ouverts les "intervalles" de la forme  $B(f, \varepsilon)$  avec :

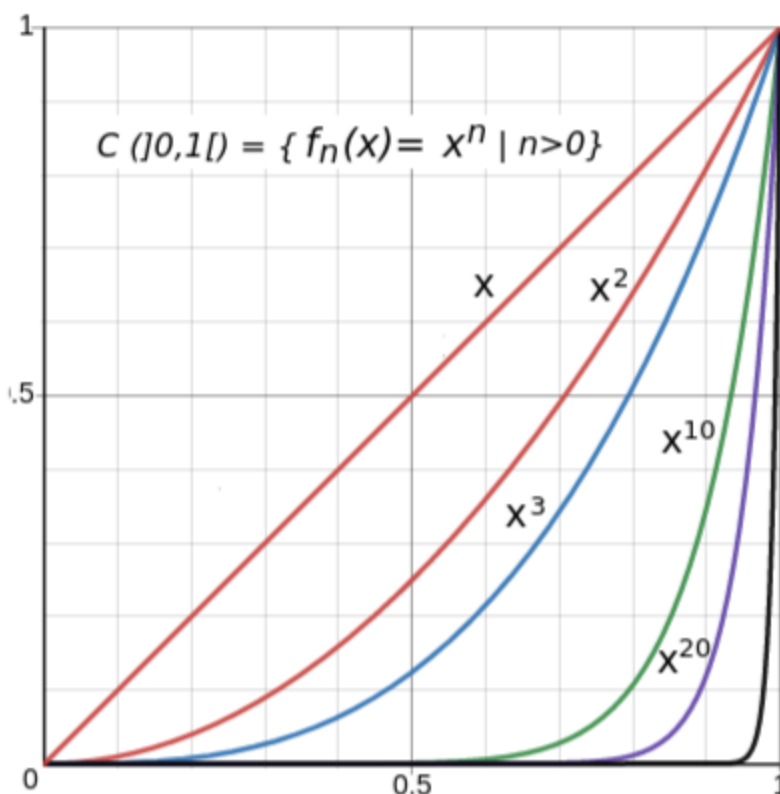
- $f$  : fonction de  $C(X)$
- $\varepsilon > 0$  : réel positif
- $B(f, \varepsilon)$  : ensemble des fonctions  $g$  de  $C(X)$  telles que  $\|f - g\| < \varepsilon$ .

La topologie  $T_{\text{cun}}$  sur  $C(X)$  est appelée la topologie de la convergence uniforme car elle est définie en termes de notion de convergence uniforme des fonctions. Plus précisément, une suite de fonctions  $\{f_n\}$  dans  $C(X)$  converge uniformément vers une fonction  $f$  si la distance uniforme  $\|f_n - f\|$  tend vers 0 quand  $n$  tend vers l'infini.

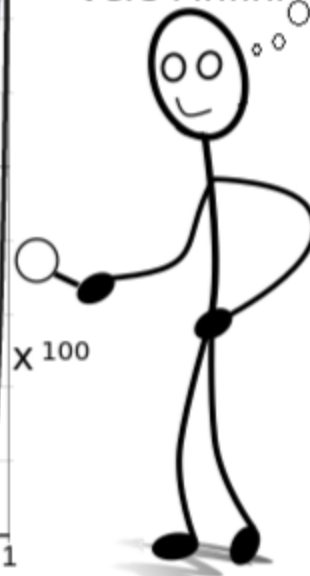
La distance uniforme entre deux fonctions  $f$  et  $g$  est définie par :

$$\|f - g\| = \sup\{|f(x) - g(x)| \mid x \in X\}$$

Un exemple d'espace topologique  $(C(X), T_{\text{cun}})$  est l'espace des fonctions  $f_n(x) = x^n$  avec  $n \geq 1$  continues sur l'intervalle  $X = ]0, 1[$ , muni de la topologie de la convergence uniforme.



$x^n$  converge  
uniformément  
vers 0 sur  $]0, 1[$   
quand  $n$  tend  
vers l'infini



## Questions-réponses

---

### 1) Norme infinie

- *En mathématiques, en topologie, Qu'est ce que la norme infinie ?*

En topologie, la norme infinie (aussi appelée norme de la convergence uniforme) est une norme utilisée sur les espaces de fonctions continues. Elle mesure la distance maximale entre une fonction et sa limite. Plus précisément, soit  $f$  une fonction continue définie sur un intervalle  $I$  de  $\mathbb{R}$ , la norme infinie de  $f$  est définie comme suit :

$$\|f\|_{\infty} = \sup_{x \in I} |f(x)|$$

Cela signifie que la norme infinie de  $f$  est égale à la plus grande valeur absolue prise par  $f(x)$  sur l'intervalle  $I$ .

Quand on considère un espace de fonctions continues, la norme infinie est utilisée pour définir la topologie de la convergence uniforme. Deux fonctions  $f$  et  $g$  sont dites proches (au sens de la convergence uniforme) si leur distance (au sens de la norme infinie) est petite. Formellement, cela signifie que pour tout  $\epsilon > 0$ , il existe un entier  $N$  tel que si  $n \geq N$ , alors  $\|f_n - f\|_{\infty} < \epsilon$ .

La norme infinie permet également de mesurer la distance entre deux fonctions continues sur un intervalle donné. Si  $f$  et  $g$  sont deux fonctions continues définies sur l'intervalle  $[a, b]$ , leur distance  $\|f - g\|_{\infty}$  est définie comme la plus grande différence entre les valeurs de  $f$  et de  $g$  sur l'intervalle, c'est-à-dire :

$$\|f - g\|_{\infty} = \sup_{x \in [a, b]} |f(x) - g(x)|$$

La norme infinie est utile dans l'étude des séries de fonctions, notamment pour établir des critères de convergence.

### 2) Ensemble $[0,1]$

- *En mathématiques, le sous ensemble  $[0,1]$  de  $\mathbb{R}$  peut-il constituer un espace topologique ?*

Le sous-ensemble  $E=[0,1]$  de  $\mathbb{R}$  avec la topologie induite par la métrique usuelle de  $\mathbb{R}$  (c'est-à-dire la distance euclidienne) n'est pas un espace topologique.

En effet,  $E=[0,1]$  n'est pas un ouvert de  $\mathbb{R}$  car il n'existe pas de voisinage ouvert de 0 ou de 1 inclus dans  $[0,1]$ . L'ensemble  $E=[0,1]$  est un fermé de  $\mathbb{R}$ .

Donc si l'on munit  $E=[0,1]$  de la topologie induite par  $\mathbb{R}$ , cela ne peut pas constituer un espace topologique, car un espace topologique doit inclure à la fois l'ensemble vide et l'ensemble tout entier, qui doivent être tous les deux des ouverts.

Cependant, on peut toujours munir  $E=[0,1]$  d'une topologie, différente de celle induite par  $\mathbb{R}$ , qui pourrait ainsi faire de  $E=[0,1]$  un espace topologique. Il suffit d'inclure seulement l'ensemble vide et l'ensemble  $[0,1]$  tout entier comme ouverts.

$$T_{gro} = \{[0, 1], \emptyset\}$$

Une telle topologie, appelée la "topologie grossière" sur  $[0,1]$  est la topologie la plus grossière (la moins fine) qui fasse du couple  $(E,T)$  un espace topologique.

### 3) Topologie euclidienne

- *Les termes "topologie usuelle de  $\mathbb{R}$ " et "topologie euclidienne de  $\mathbb{R}$ " sont ils équivalents ?*

Oui, les termes "topologie usuelle de  $\mathbb{R}$ " et "topologie euclidienne de  $\mathbb{R}$ " sont équivalents. Ils désignent tous deux la topologie induite sur  $\mathbb{R}$  par la métrique euclidienne standard, qui est donnée par la distance entre deux points  $x$  et  $y$  de  $\mathbb{R}$  :

$$d(x, y) = |x - y|$$

La topologie usuelle (ou euclidienne) de  $\mathbb{R}$  est alors définie à partir de cette métrique, en définissant les ensembles ouverts comme ceux qui contiennent un voisinage ouvert de chaque point.

### 4) Distance uniforme

- *La distance uniforme et la norme infinie sont elles la même chose ?*

Oui, la distance uniforme et la norme infinie sont équivalentes. La norme infinie, d'une fonction  $f$  définie sur un ensemble  $X$ , est définie comme suit :



$$\|f\|_{\infty} = \sup |f(x)| : x \in X$$

La norme infinie mesure la plus grande valeur absolue de  $f$  sur  $X$ . La distance uniforme entre deux fonctions  $f$  et  $g$  est définie comme suit :

$$d_{\text{uniforme}}(f, g) = \|f - g\|_{\infty} = \sup |f(x) - g(x)| : x \in X$$

On peut donc voir que la distance uniforme est simplement la norme infinie de la différence entre deux fonctions  $f$  et  $g$ . C'est pourquoi ces deux notions sont souvent utilisées de manière interchangeable dans le contexte de l'espace des fonctions continues.

## 5) Espace topologique séparé

### • *Qu'est ce qu'un espace topologique séparé ?*

Un espace topologique séparé, également appelé un espace de Hausdorff, est un type d'espace topologique dans lequel deux points distincts peuvent être séparés par des ouverts disjoints. Autrement dit, pour tout couple de points distincts  $x$  et  $y$  de l'espace topologique, il existe deux ouverts disjoints  $U$  et  $V$  tels que  $x$  appartient à  $U$  et  $y$  appartient à  $V$ .

Formellement, un espace topologique  $(E, T)$  est dit séparé si pour tout couple de points distincts  $x$  et  $y$  de  $E$ , il existe des ouverts  $O(x)$  et  $O(y)$  contenant  $x$  et  $y$  respectivement et tels que  $O(x) \cap O(y) = \emptyset$ .

Cette propriété de séparation est importante car elle permet de définir des notions telles que la continuité et la convergence de manière précise et cohérente. En particulier, dans un espace topologique séparé, deux suites convergentes ont des limites distinctes si et seulement si ces suites sont elles-mêmes distinctes.

De nombreux espaces topologiques couramment étudiés, tels que les espaces métriques (par exemple, l'espace euclidien), sont séparés, mais il existe également des espaces topologiques non séparés, tels que l'espace quotient de la droite réelle par la relation d'équivalence qui identifie tous les points rationnels.

## 6) Base topologique

- *Qu'est ce qu'une base topologique  $B$ , pour un espace topologique  $E$  muni d'une topologie  $T$ ?*

Soient  $(E, T)$  un espace topologique, et soit  $B$  contenu dans  $T$  une famille de parties ouvertes de  $E$ . On appelle  $B$  "base de la topologie  $T$  de  $E$ " si tout ouvert de  $E$  est réunion d'éléments de  $B$ .

Une base topologique  $B$ , pour un espace topologique  $E$  muni d'une topologie  $T$ , est une collection de sous-ensembles de  $E$  tels que :

- Chaque élément de  $B$  est un ouvert de  $E$ .
- Tout ouvert de  $E$  peut être écrit comme une union quelconque d'éléments de  $B$ .

En d'autres termes, une base topologique est une collection d'ouverts qui permet de générer l'ensemble des ouverts de la topologie  $T$  en prenant des unions quelconques d'éléments de cette collection.

L'utilisation d'une base topologique permet souvent de simplifier les preuves et les démonstrations en offrant une approche plus élémentaire pour caractériser les ouverts d'un espace topologique. Cela permet également de décrire plus facilement les propriétés des espaces topologiques et de les comparer les uns aux autres. Par exemple, deux espaces topologiques avec la même base topologique ont des propriétés topologiques similaires.



## Chapitre 2

# Parties d'un espace topologique

► **Ce qu'il faut savoir**

- 1 - Ouvert, Fermé
- 2 - Intérieur, Extérieur
- 3 - Frontière, Adhérence
- 4 - Voisinage, Point limite

► **Exemples**

► **Questions-réponses**



## Ce qu'il faut savoir

### 1) Ouvert, Fermé

#### 1.1) Ouvert

Soit  $E$  un ensemble. Soit  $T$  une famille contenant  $E$ ,  $\emptyset$  et certaines parties de  $E$ , définissant une topologie particulière sur  $E$ . Les éléments de  $T$  constituent les ouverts de  $E$  pour cette topologie.

Dans un espace topologique  $(E, T)$ , les ouverts de  $E$  sont les éléments de  $T$ , pour la topologie utilisée.

Certaines parties de  $E$  qui ne sont pas dans  $T$  peuvent être fermées, ou ni ouvertes ni fermées.

Dans un espace topologique  $(E, T)$ , un sous-ensemble quelconque  $A$  de  $E$  est dit ouvert s'il fait partie de  $T$ . Dans ce cas, pour chaque point  $x$  de  $A$ , il existe un sous-ensemble contenant  $x$ , faisant partie de  $T$  et contenu dans  $A$ .

Dans un espace topologique  $(E, T)$  :

1. L'ensemble vide et  $E$  sont des ouverts ;
2. L'intersection de tout nombre fini d'ouverts est un ouvert ;
3. L'union de tout nombre quelconque d'ouverts (fini, infini dénombrable ou infini non dénombrable) est un ouvert.

Les ouverts sont les éléments fondamentaux de la topologie, car ils permettent de définir toutes les notions topologiques, telles que la continuité, la convergence, la connexité, la compacité, etc. Par exemple, une fonction entre deux espaces topologiques est continue si et seulement si l'image inverse de tout ouvert est un ouvert.

Les ouverts sont souvent représentés par des dessins, tels que des cercles ou des rectangles, pour aider à visualiser les propriétés topologiques d'un espace.

La notion d'ouvert est étroitement liée à celle de fermé, qui est le complémentaire d'un ouvert. En effet, un sous-ensemble  $F$  d'un espace topologique  $(E, T)$  est fermé si et seulement si son complémentaire  $\complement_E(F)$  est un ouvert.

Voici quelques exemples d'ouverts :

1. Dans l'espace euclidien de dimension 1, un intervalle ouvert est un ouvert. Par exemple, l'intervalle ouvert  $]0,1[$  est un ouvert de la droite réelle.
2. Dans l'espace euclidien de dimension  $n$ , un domaine est un ouvert. Par exemple, le plan  $xy$  est un ouvert de l'espace tridimensionnel.
3. Dans l'espace euclidien de dimension  $n$ , une boule ouverte est un ouvert. Par exemple, la boule ouverte de rayon 1 centrée en l'origine est un ouvert de l'espace tridimensionnel.
4. Dans un espace topologique discret, chaque singleton est un ouvert.
5. Dans un espace topologique trivial, l'unique point est un ouvert.
6. Dans un espace topologique produit, le produit d'ouverts est un ouvert. Par exemple, le produit de deux intervalles ouverts est un ouvert du plan.
7. Dans un espace topologique quotient, l'image d'un ouvert par la projection est un ouvert.

Ces exemples illustrent la variété des ouverts en topologie, et montrent que chaque espace topologique a sa propre collection d'ouverts qui peuvent être étudiés.

Les éléments d'un espace topologique  $E$  sont appelés "points". La collection des ouverts définit la façon dont ces points sont "proches" les uns des autres.

Par exemple, si deux points  $x$  et  $y$  sont dans le même ouvert  $O_i$  d'un espace topologique  $E$ , ils sont considérés comme "proches" l'un de l'autre. Une fonction entre deux espaces topologiques est dite continue si elle préserve la topologie, c'est-à-dire si l'image inverse de tout ouvert est un ouvert.

## 1.2) Fermé

Dans un espace topologique  $(E,T)$ , un sous-ensemble  $A$  de  $E$  est dit fermé si le complémentaire de  $A$  dans  $E$ , noté  $\complement_E(A)$ , est un ouvert.

Dans un espace topologique  $(E, T)$ , soit  $F$  l'ensemble des parties fermées de  $E$ . Les propriétés suivantes découlent de celles des ouverts, par passage au complémentaire :

- (1)  $E$  et  $\emptyset$  appartiennent à  $F$  ;
- (2) Une intersection finie de fermés appartient à  $F$  ;
- (3) Une réunion quelconque (finie, infinie dénombrable ou infinie non dénombrable) de fermés appartient  $F$ .

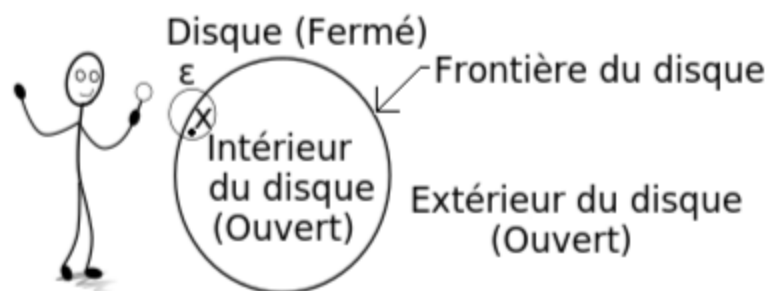
On a :

- (1) :  $E \in F$  et  $\emptyset \in F$
- (2) :  $(F_i)_{i=1}^k \subset F \Rightarrow \bigcap_{1 \leq i \leq k} F_i \in F$
- (3) :  $(F_i)_{i \in I} \subset F \Rightarrow \bigcup_{i \in I} F_i \in F$

Un ensemble est fermé s'il contient tous ses points limites (ou frontière). Par exemple, dans l'espace euclidien à deux dimensions, le disque fermé de rayon 1 centré en l'origine est un ensemble fermé.

En effet, tout point à l'extérieur du disque présente une distance strictement supérieure à 1, par rapport à l'origine, et donc ne peut pas être un point limite du disque.

De plus, tout point sur la frontière du disque est un point limite du disque car pour tout rayon epsilon strictement positif, il existe un point du disque à une distance inférieure à epsilon de ce point.



Les fermés sont importants en topologie car ils permettent de caractériser les ouverts, qui sont l'objet central de l'étude de la topologie. En effet, un ensemble est ouvert si et seulement si son complémentaire est fermé.

De plus, l'étude des fermés permet de définir des notions importantes telles que la compacité, qui est une propriété topologique

clé qui caractérise la capacité d'un espace à être recouvert par un nombre fini d'ouverts.

### 1.3) Ouvert et Fermé

Généralement un ouvert n'est pas également un fermé, mais cela peut néanmoins se produire dans certains cas.

Par exemple :

- Soient  $E = \{v, w, x, y, z\}$  et  $T_{dir} = \{E, \emptyset, \{v\}, \{x, y\}, \{v, x, y\}, \{w, x, y, z\}\}$
- $T_{dir}$  forme une topologie sur  $E$
- $(E, T_{dir})$  est un espace topologique
- Les ouverts de  $E$  sont :  $E, \emptyset, \{v\}, \{x, y\}, \{v, x, y\}$  et  $\{w, x, y, z\}$
- Les fermés de  $E$  sont :  $E, \emptyset, \{w, x, y, z\}, \{v, w, z\}, \{w, z\}$  et  $\{v\}$
- $\{w, x, y, z\}$  est à la fois un ouvert et un fermé
- $\{v, w\}$  n'est ni ouvert ni fermé

Les exemples d'ouverts et de fermés dépendent de l'ensemble  $E$  et de la topologie  $T$  considérée.

Avec la topologie  $T$  usuelle (ou topologie euclidienne) sur  $\mathbb{R}$  un ouvert est défini par tout intervalle ouvert  $]a, b[$  (où  $a$  et  $b$  sont des nombres réels avec  $a < b$ ), ainsi que par les unions arbitraires d'intervalles ouverts.

Les fermés de cette topologie sont les complémentaires des ouverts, c'est-à-dire les parties de  $\mathbb{R}$  qui contiennent tous leurs points limites.

Les exemples d'ouverts et de fermés dans cette topologie sont les suivants :

- Les intervalles ouverts  $]a, b[$  sont des ouverts de  $\mathbb{R}$ .
- Les intervalles fermés  $[a, b]$  sont des fermés de  $\mathbb{R}$ .
- $\mathbb{R}$  et l'ensemble vide sont à la fois des ouverts et des fermés

Il est à noter que certains sous-ensembles de  $\mathbb{R}$  sont ni ouverts ni fermés :

- Les demi-intervalles ouverts  $]a, b]$  et  $[a, b[$  ne sont ni des ouverts ni des fermés de  $\mathbb{R}$ .
- L'ensemble des nombres rationnels est ni ouvert ni fermé dans  $\mathbb{R}$ .
- L'ensemble des nombres irrationnels (comme  $\sqrt{2}$  ou  $\sqrt{3}$ ) est ni ouvert ni fermé dans  $\mathbb{R}$ .

En plus de la topologie  $T$  usuelle (topologie euclidienne) sur  $\mathbb{R}$ , il existe d'autres topologies  $T$  sur divers ensembles  $E$ , telles que la topologie discrète  $T$  (dans laquelle tous les sous-ensembles de  $T$  sont ouverts) et la topologie grossière (dans laquelle seuls  $E$  et l'ensemble vide sont ouverts).

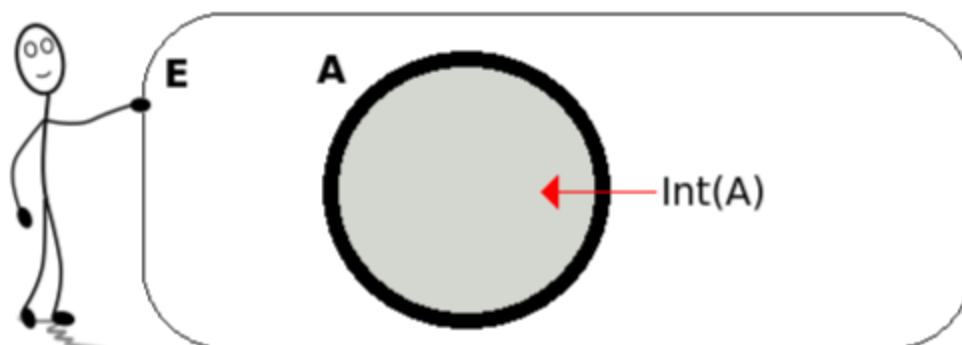
Dans ces topologies, les exemples d'ouverts et de fermés sont différents de ceux de la topologie usuelle.

## 2) Intérieur, Extérieur

### 2.1) Intérieur

Dans un espace topologique  $(E, T)$ , l'intérieur d'un sous-ensemble  $A$  de  $E$  est la réunion de tous les ouverts de  $E$  contenus dans  $A$ . L'intérieur de  $A$  est donc le plus grand ouvert contenu dans  $A$ .

L'intérieur d'un sous-ensemble  $A$  de  $E$  est noté  $\text{Int}(A)$  ou  $\overset{\circ}{A}$  et est également appelé "ouverture" de  $A$ . L'intérieur d'un sous-ensemble  $A$  de  $E$  est une partie ouverte de  $E$ .



L'intérieur d'un sous-ensemble  $A$  d'un espace topologique  $E$ , est l'ensemble des points de  $A$  autour desquels on peut trouver un petit ouvert de  $E$  qui est entièrement contenu dans  $A$ .

$$\text{Int}(A) = \{x \in E \mid \text{il existe un ouvert } U \text{ de } E \text{ tel que } x \in U \text{ et } U \subseteq A\}$$

Un point  $x$  de  $E$  est un point intérieur d'un sous-ensemble  $A$  de  $E$  si et seulement si  $A$  est un voisinage de  $x$ .

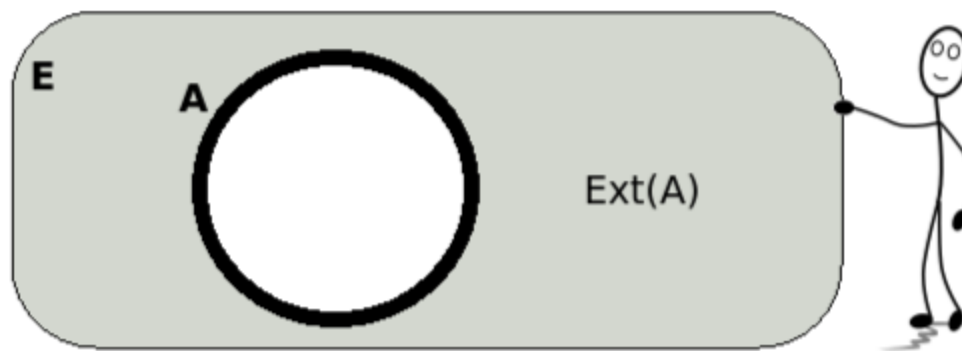


## 2.2) Extérieur

Dans un espace topologique  $(E, T)$ , l'extérieur d'un sous-ensemble  $A$  de  $E$  est l'intérieur de son complémentaire. L'extérieur de  $A$  est le plus grand ouvert de  $E$  qui soit disjoint de  $A$ .

L'extérieur d'un sous-ensemble  $A$  de  $E$  est noté  $\text{Ext}(A)$ .

Tout comme l'intérieur de  $A$ , l'extérieur de  $A$  est une partie ouverte de  $E$ .



L'extérieur d'un sous-ensemble  $A$  d'un espace topologique  $E$  est l'ensemble des points de  $E$  qui ne sont pas dans  $A$  mais qui sont dans un ouvert qui contient  $A$ . Autrement dit, c'est l'ensemble des points de  $E$  qui ne sont pas "touchés" par  $A$ .

$$\text{Ext}(A) = \{x \in E \mid \exists \text{ un ouvert } U \text{ de } E \text{ tel que } x \in U \text{ et } U \subseteq \complement_E A\}$$

Un point  $x$  de  $E$  est un point extérieur à sous-ensemble  $A$  de  $E$  s'il appartient à l'intérieur du complémentaire de  $A$  dans  $E$ .

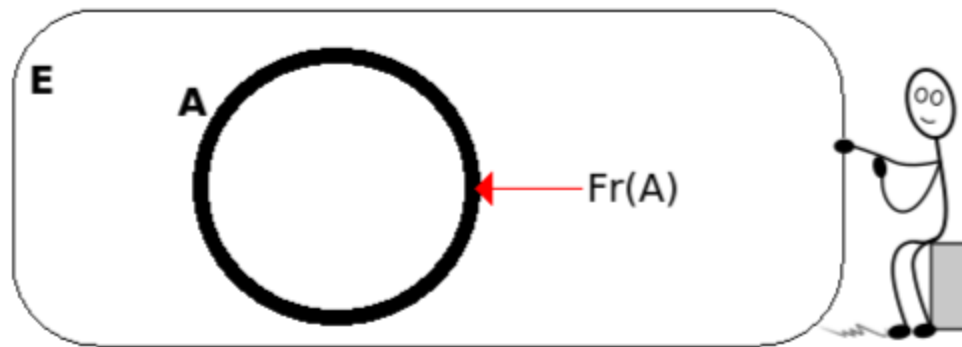
$$\text{On a : } \text{Ext}(A) = \text{Int}(\complement_E A)$$

## 3) Frontière, Adhérence

### 3.1) Frontière

La frontière  $\text{Fr}(A)$  d'un sous-ensemble  $A$  de  $E$  est l'ensemble des points de  $A$  qui n'appartiennent ni à l'intérieur ni à l'extérieur de  $A$ .

La frontière de  $A$  est une partie fermée car son complémentaire est une partie ouverte (réunion de l'intérieur et de l'extérieur de  $A$ ).



Un point  $a$  de  $E$  appartient à la frontière  $\text{Fr}(A)$  d'un sous-ensemble  $A$  de  $E$  si et seulement si tout voisinage de  $a$  contient des points de  $A$  et des points de son complémentaire  $\complement_E A$ .

L'intérieur, l'extérieur, et la frontière de  $A$  sont disjoints et ont pour réunion  $E$ .

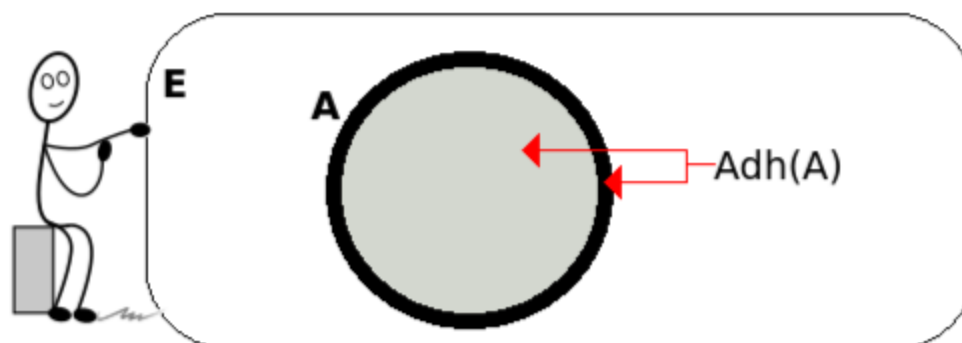
On a :

- $\text{Int}(A) \cap \text{Fr}(A) = \emptyset$
- $\text{Ext}(A) \cap \text{Fr}(A) = \emptyset$
- $\text{Int}(A) \cap \text{Ext}(A) = \emptyset$
- $\text{Int}(A) \cup \text{Ext}(A) \cup \text{Fr}(A) = E$

### 3.2) Adhérence

L'adhérence d'un sous ensemble  $A$  d'un espace topologique  $(E, T)$ , notée  $\text{Adh}(A)$  ou  $\bar{A}$  est l'intersection de toutes les parties fermées de  $E$  qui contiennent  $A$ .

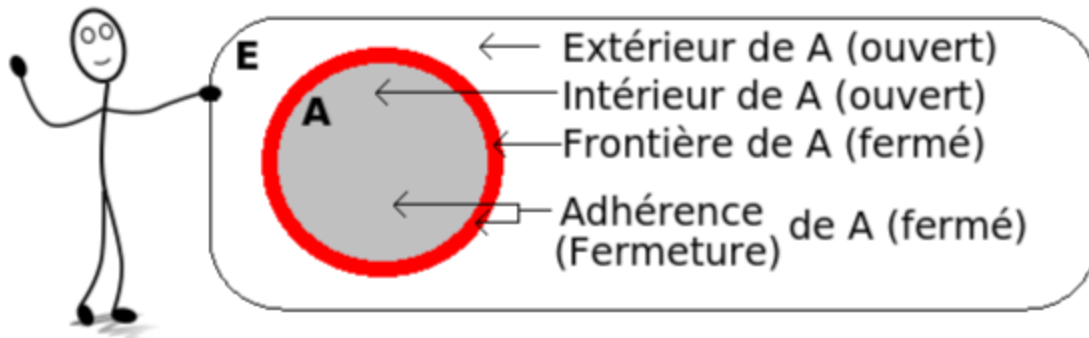
L'adhérence de  $A$  est une partie fermée.



L'adhérence d'un sous-ensemble  $A$  de  $E$  est également appelée "fermeture" de  $A$ . Un point qui appartient à  $\text{Adh}(A)$  est dit point "adhérent" à  $A$ .

On a :

- $\text{Fr}(A) = \text{Adh}(A) \cap \text{Adh}(\complement_E A)$
- $\text{Fr}(A) = \text{Adh}(A) \cap \complement_E \text{Int}(A)$
- $\text{Fr}(A) = \text{Adh}(A) - \text{Int}(A)$



## 4) Voisinage, Point limite

### 4.1) Voisinage

Dans un espace topologique  $(E, T)$ , toute partie de  $E$  contenant au moins un ouvert, contenant lui-même un point  $x$  de  $E$ , est appelée voisinage  $V(x)$  de ce point  $x$ .

On dit qu'une partie  $V(x)$  de  $E$  est un voisinage de  $x$  s'il existe un ouvert  $U_x$  de  $E$  vérifiant  $x \in U_x \subseteq V(x)$

$V(x)$  est un voisinage de  $x \Leftrightarrow \{\exists U_x \in T \mid x \in U_x \subseteq V(x)\}$

L'ensemble des voisinages d'un point  $x$  est noté  $\mathcal{V}(x)$ .

### 4.2) Point limite

Soit un espace topologique  $(E, T)$ . Un point  $x$  appartenant à  $E$  est un point limite (ou point d'accumulation ou point d'adhérence) d'un sous ensemble  $A$  quelconque de  $E$  si tout ouvert contenant  $x$ , contient également un point de  $A$  différent de  $x$ .

En particulier, un point limite d'un sous-ensemble  $A$  d'un espace topologique  $(\mathbb{R}^n, T)$  est un point  $x$  tel que toute petite boule autour de  $x$  contient au moins un élément de  $A$  différent de  $x$  lui-même.

Dans l'espace euclidien  $\mathbb{R}$ , un point  $x$  est un point d'accumulation

de  $A$  si et seulement si il existe une suite  $(x_n)$  d'éléments de  $A$  qui converge vers  $x$ , c'est-à-dire telle que la distance entre  $x_n$  et  $x$  tende vers zéro lorsque  $n$  tend vers l'infini.

Un point d'accumulation de  $A$  peut ou non appartenir à  $A$ . Si un point d'accumulation de  $A$  appartient à  $A$ , on l'appelle point adhérent ou point de fermeture de  $A$ .



## Exemples

### 1) Topologie discrète

#### 1.1) Parties

Soient :

$E = \{a, b, c\}$  et  $T_{dis} = P(E)$  ensemble de toutes les parties de  $E$

$T_{dis} = \{E, \emptyset, \{a\}, \{b\}, \{c\}, \{a, b\}, \{a, c\}, \{b, c\}\}$

$A = \{a\}$

Avec cette topologie :

- Les ouverts de  $E$  sont :  $E, \emptyset, \{a\}, \{b\}, \{c\}, \{a, b\}, \{a, c\}$  et  $\{b, c\}$
- Les fermés de  $E$  sont :  $\emptyset, E, \{b, c\}, \{a, c\}, \{a, b\}, \{c\}, \{b\}$  et  $\{a\}$
- L'intérieur de  $A$  est  $\{a\}$
- L'extérieur de  $A$  est  $\{b, c\}$
- La frontière de  $A$  est  $\emptyset$
- L'adhérence de  $A$  est  $\{a\}$
- Un voisinage de  $A$  est  $\{a\}$

Dans un espace topologique discret (ensemble doté d'une topologie discrète), tous les sous-ensembles de  $E$  sont à la fois ouverts et fermés. En effet, dans cette topologie,  $T$  est constitué de toutes les parties de  $E$ .

#### 1.2) Adhérence

Dans un espace topologique discret  $E$ , l'adhérence d'un sous-ensemble de  $E$  est égale au sous-ensemble lui-même.

## 2) Topologie discrète restreinte

Soient :

$$E = \{a, b, c, d, e\} \text{ et } T_{dir} = \{E, \emptyset, \{a\}, \{c, d\}, \{a, c, d\}, \{b, c, d, e\}\}.$$

$$A = \{a\}$$

Avec cette topologie :

- Les ouverts de  $E$  sont :  $E, \emptyset, \{a\}, \{c, d\}, \{a, c, d\}$  et  $\{b, c, d, e\}$
- Les fermés de  $E$  sont :  $\emptyset, E, \{b, c, d, e\}, \{a, b, e\}, \{b, e\}$  et  $\{a\}$
- L'intérieur de  $A$  est  $\{a\}$
- L'extérieur de  $A$  est  $\{b, c, d, e\}$
- La frontière de  $A$  est  $\emptyset$
- L'adhérence de  $A$  est  $\{a\}$
- Un voisinage de  $A$  est  $\{a\}$

Soit le sous-ensemble  $G = \{a, b, c\}$  de  $E$

Le point  $b$  est un point limite de  $G$ . En effet, tous les ouverts contenant  $b$ , à savoir  $E$  et  $\{b, c, d, e\}$  contiennent un point de  $G$  différent de  $b$ .

Dans un espace topologique discret restreint  $(E, T)$ , certains sous-ensembles de  $E$  peuvent ne pas être ouverts ou fermés. En effet, dans cette topologie,  $T$  n'est pas constitué de toutes les parties de  $E$ . Par exemple, le sous-ensemble  $\{a, b\}$ , dans l'exemple ci-dessus n'est ni ouvert ni fermé.

L'adhérence d'un sous ensemble  $A$ , dans un espace topologique discret restreint  $(E, T_{dir})$  est égale à l'intersection de tous les sous-ensembles fermés  $F_i$  de  $F$  qui contiennent  $A$

L'adhérence de  $\{b\}$  est donc  $E \cap \{b, e\} \cap \{a, b, e\} \cap \{b, c, d, e\} = \{b, e\}$

L'adhérence de  $\{a, c\}$  est  $E$

L'adhérence de  $\{b, d\}$  est donc  $E \cap \{b, c, d, e\} = \{b, c, d, e\}$

## 3) Topologie usuelle sur $\mathbb{R}$

### 3.1) Parties

Soient :

$$\mathbb{R} = ] - \infty, +\infty[ \text{ et } T_{usu} = \{\mathbb{R}, \emptyset, \text{tous les ouverts de } \mathbb{R}\}$$

Avec cette topologie :

- L'intérieur d'un ouvert  $]a, b[$  est  $]a, b[$
- L'extérieur d'un ouvert  $]a, b[$  est  $] - \infty, a] \cup [b, +\infty[$
- La frontière de  $[a, b]$  est  $\{a\}, \{b\}$
- L'adhérence de  $]a, b[$  est  $[a, b]$
- Le plus grand voisinage de  $x \in ]a, b[$  est  $[a, b]$

Dans  $\mathbb{R}$ , si  $A$  est l'ensemble  $\{1/n \mid n \in \mathbb{N}\}$ , alors zéro est un point limite de  $A$ .

Dans l'espace euclidien  $\mathbb{R}^n$ , l'ensemble vide  $\emptyset$  et  $\mathbb{R}^n$  lui-même sont des exemples d'ensembles qui sont à la fois fermés et ouverts.

Un intervalle ouvert  $]a, b[$  dans  $\mathbb{R}$  est un exemple d'ensemble ouvert, tandis que son complémentaire  $\mathbb{R} - ]a, b[$  est un exemple d'ensemble fermé.

Il est possible d'avoir des ensembles qui sont à la fois ouverts et fermés (comme  $\mathbb{R}^n$  et l'ensemble vide), ainsi que des ensembles qui ne sont ni ouverts ni fermés (comme l'intervalle semi-ouvert  $]a, b]$  dans  $\mathbb{R}$ ).

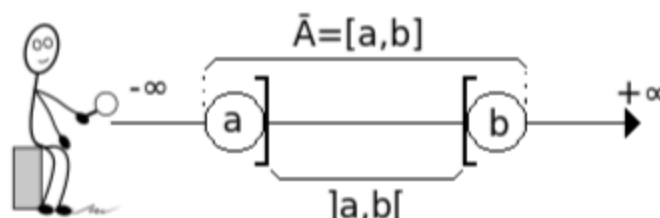
On a

- $\forall x \in \mathbb{R}, \text{Adh}(\{x\}) = \{x\}$
- $\forall x, y \in \mathbb{R}, \text{Adh}([x, y]) = \text{Adh}([x, y[) = \text{Adh(]x, y]) = \text{Adh(]x, y[)$

### 3.2) Adhérence

Dans  $\mathbb{R}$ , l'adhérence d'un intervalle ouvert ou semi ouvert est l'intervalle fermé correspondant :

$$\begin{aligned} A = ]a, b[ &\Rightarrow \bar{A} = [a, b] \\ A = ]a, b] &\Rightarrow \bar{A} = [a, b] \\ A = [a, b[ &\Rightarrow \bar{A} = [a, b] \end{aligned}$$



Un point  $x$  de  $\mathbb{R}$  est adhérent à une partie  $A$  de  $\mathbb{R}$  si et seulement si tout voisinage de  $x$  c'est à dire tout ouvert contenant  $x$  rencontre  $A$ .

$$\forall r > 0, ]x - r, x + r[ \cap A \neq \emptyset$$

### 3.3) Sous-ensemble $\mathbb{Q}$

Le sous-ensemble  $\mathbb{Q}$  de  $\mathbb{R}$  représente l'ensemble des nombres rationnels (c'est à dire les nombre qui peuvent s'écrire sous forme d'une fraction).

$$\mathbb{Q} = \{ a/b \mid a \in \mathbb{Z}, b \in \mathbb{Z} - \{0\} \}$$

Dans l'espace topologique euclidien  $(\mathbb{R}, T_{usu})$  :

- l'adhérence de l'ensemble de tous les nombres rationnels est l'ensemble de tous les nombres réels.
- l'adhérence de l'ensemble de tous les nombres irrationnels est l'ensemble de tous les nombres réels.
- l'adhérence de l'ensemble de tous les nombres réels est l'ensemble de tous les nombres réels.

On a

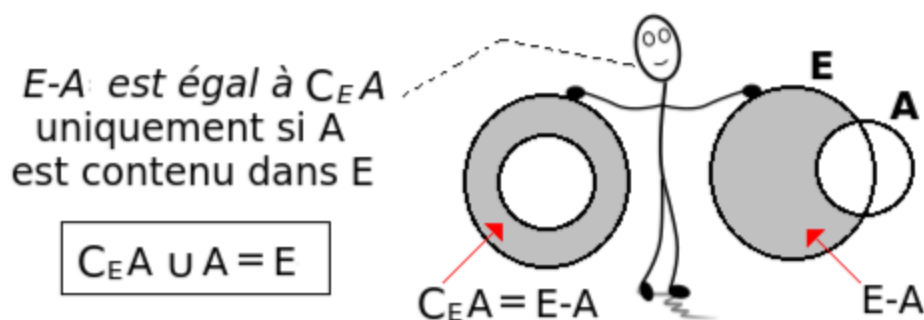
- $\text{Int}(\mathbb{Q}) \cup \text{Ext}(\mathbb{Q}) \cup \text{Fr}(\mathbb{Q}) = \mathbb{R}$
- $\text{Int}(\mathbb{Q}) = \emptyset, \text{Ext}(\mathbb{Q}) = \mathbb{C}_{\mathbb{R}}(\mathbb{Q})$  et  $\text{Fr}(\mathbb{Q}) = \mathbb{Q}$
- $\text{Adh}(\mathbb{Q}) = \text{Adh}(\mathbb{R} - \mathbb{Q}) = \mathbb{R}, \text{Adh}(\mathbb{N}) = \mathbb{N},$  et  $\text{Adh}(\mathbb{Z}) = \mathbb{Z}$

## Questions-réponses

### 1) Complémentaire d'un ensemble

- *Le complémentaire d'un ensemble  $A$  entièrement inclus dans un ensemble  $E$  peut s'écrire :  $E \setminus A$  ou  $\mathbb{C}_E(A)$  ou  $A^c$ .  
Mais que représente la notation  $E-A$ ?*

Si  $A$  est inclus dans  $E$ , alors les expressions  $E \setminus A$  et  $E-A$  sont équivalentes. En revanche, si  $A$  n'est pas inclus dans  $E$ , alors l'expression  $E \setminus A$  n'a pas de sens.



## 2) Ensemble $\mathbb{Q}$

- *Est-il exact que l'ensemble  $\mathbb{Q}$  des nombres rationnels est ni ouvert ni fermé dans  $\mathbb{R}$  ?*

Oui, c'est exact. L'ensemble  $\mathbb{Q}$  des nombres rationnels n'est ni ouvert ni fermé dans  $\mathbb{R}$ , l'ensemble des nombres réels.

Pour montrer que  $\mathbb{Q}$  n'est pas ouvert dans  $\mathbb{R}$ , on peut considérer un nombre rationnel  $q$  dans  $\mathbb{Q}$  et un rayon  $r$  positif. Il est toujours possible de trouver un nombre irrationnel  $a$  dans l'intervalle  $(q-r, q+r)$ , car il y a une infinité de nombres irrationnels dans  $\mathbb{R}$ . Par conséquent, il n'y a pas de boule ouverte autour de  $q$  qui soit entièrement contenue dans  $\mathbb{Q}$ , ce qui montre que  $\mathbb{Q}$  n'est pas ouvert dans  $\mathbb{R}$ .

Pour montrer que  $\mathbb{Q}$  n'est pas fermé dans  $\mathbb{R}$ , il suffit de trouver une suite convergente de nombres rationnels dont la limite n'appartient pas à  $\mathbb{Q}$ . Un exemple de suite de ce type est la suite  $(a_n)$  définie par  $a_n = (1 + \frac{1}{n})^n$ , qui converge vers le nombre réel  $e$ , qui est irrationnel.

## 3) Intervalles $]a, b]$ et $[a, b[$

- *Pourquoi les demi-intervalles ouverts  $]a, b]$  et  $[a, b[$  de  $\mathbb{R}$  ne sont ni ouverts ni fermés ?*
  - $]a, b]$  n'est pas un ouvert, car il n'existe pas de voisinage de  $b$  inclus dans  $]a, b]$ . En effet, tout voisinage de  $b$  doit contenir des points strictement plus grands que  $b$ , ce qui empêche  $]a, b]$  d'être un ouvert.
  - $]a, b]$  n'est pas non plus un fermé, car il contient des points limites qui ne lui appartiennent pas. En particulier, le point  $a$  est un point limite de  $]a, b]$  qui n'appartient pas à cet intervalle.
  - $[a, b[$  n'est pas un ouvert, car il n'existe pas de voisinage de  $a$  inclus dans  $[a, b[$ . En effet, tout voisinage de  $a$  doit contenir des points strictement inférieurs à  $a$ , ce qui empêche  $[a, b[$  d'être un ouvert.
  - $[a, b[$  n'est pas non plus un fermé, car il contient des points limites qui ne lui appartiennent pas. En particulier, le point  $b$  est un point limite de  $[a, b[$  qui n'appartient pas à cet intervalle.



#### 4) Complémentaire de $]a,b[$ dans $\mathbb{R}$

- *Le complémentaire de  $]a,b[$  dans  $\mathbb{R}$  est-il ouvert ou fermé??*

Le complémentaire de l'intervalle ouvert  $]a,b[$  dans l'espace topologique des nombres réels  $\mathbb{R}$  est l'union des deux intervalles fermés suivants :  $]-\infty, a]$  et  $[b, +\infty[$ .

L'intervalle fermé  $]-\infty, a]$  est fermé dans  $\mathbb{R}$  car il contient toutes ses limites inférieures.

De même, l'intervalle fermé  $[b, +\infty[$  est également fermé dans  $\mathbb{R}$  car il contient toutes ses limites supérieures.

Ainsi, le complémentaire de  $]a,b[$  dans  $\mathbb{R}$  est l'union de deux ensembles fermés, ce qui signifie qu'il est lui-même fermé dans  $\mathbb{R}$ .

#### 5) Frontière et adhérence

- *En mathématiques, dans un espace topologique, quelle est la différence entre frontière et adhérence?*

En mathématiques, frontière et adhérence sont deux concepts importants en topologie, qui sont liés mais distincts.

L'adhérence d'un sous-ensemble  $A$  quelconque d'un espace topologique  $(E,T)$  est définie comme l'intersection de tous les fermés (de la topologie  $T$ ) qui contiennent  $A$ . On note habituellement l'adhérence de  $A$  par  $\bar{A}$ . L'adhérence d'un sous-ensemble (ouvert ou fermé)  $A$  est l'union de  $A$  et de sa frontière.

$$\bar{A} = A \cup \partial A$$

La frontière d'un sous-ensemble  $A$  d'un espace topologique  $(E,T)$ , notée  $\partial A$ , est définie comme l'ensemble des points de  $E$  qui sont à la fois dans l'adhérence de  $A$  et dans l'adhérence du complémentaire de  $A$ .

$$\partial A = \bar{A} \cap \overline{X - A}$$

La frontière représente les points qui sont à la frontière entre l'ensemble et son complémentaire, tandis que l'adhérence est l'ensemble complet des points qui sont "proches" de l'ensemble.

Par exemple : Si  $X$  est l'espace topologique  $\mathbb{R}$  avec la topologie standard et  $A$  est l'intervalle ouvert  $]0,1[$ , alors l'adhérence de  $A$  est l'intervalle fermé  $[0,1]$  et la frontière de  $A$  correspond aux deux points  $\{0\}$  et  $\{1\}$ .

$$\bar{A} = A \cup \partial A = ]0,1[ \cup \{0\} \cup \{1\} = [0,1]$$

$$\partial A = \bar{A} \cap \overline{\mathbb{R} - A} = [0,1] \cap ]-\infty,0] \cup [1,+\infty[ = \{0\}, \{1\}$$

## 6) Espace euclidien

- *Qu'est ce qu'un espace euclidien ?*

Un espace euclidien est un espace vectoriel muni d'une structure géométrique particulière appelée produit scalaire, qui permet de mesurer les angles et les distances entre les vecteurs de cet espace.

Plus précisément, un espace euclidien est un espace vectoriel réel  $E$  muni d'une application bilinéaire symétrique et définie positive, appelée produit scalaire et notée  $\langle \cdot, \cdot \rangle$ , qui à chaque paire de vecteurs  $x, y \in E$  associe un réel  $\langle x, y \rangle$  satisfaisant les propriétés suivantes :

- $\langle x, y \rangle = \langle y, x \rangle$  pour tous les  $x, y \in E$  (symétrie)
- $\langle x, x \rangle > 0$  pour tout vecteur  $x \neq 0$  de  $E$  (défini positif)
- $\langle x, y \rangle = 0$  si et seulement si  $x$  et  $y$  sont perpendiculaires

et, pour tous les  $x, y, z \in E$  et tous les scalaires  $a \in \mathbb{R}$  :

- $\langle x+y, z \rangle = \langle x, z \rangle + \langle y, z \rangle$
- $\langle ax, y \rangle = a \langle x, y \rangle$

L'application norme  $\|\cdot\|$  définie par  $\|x\| = \sqrt{\langle x, x \rangle} \forall x \in E$  est alors une norme sur  $E$ , appelée norme euclidienne, qui permet de mesurer les distances entre les vecteurs de  $E$ .

Les espaces euclidiens sont donc des espaces vectoriels munis d'une structure géométrique très utile pour la géométrie, l'algèbre linéaire, l'analyse fonctionnelle et de nombreuses autres branches des mathématiques et des sciences.

## 7) Étude d'un sous ensemble

- Quelle méthode pourrait-on utiliser pour étudier un sous-ensemble  $A$  de  $E$ , dans le cas d'un espace topologique  $(E, T)$  ?

La méthode suivante peut être utilisée pour déterminer, l'intérieur, l'extérieur, l'adhérence et la frontière d'un sous-ensemble  $A$  d'un espace  $E$  doté d'une topologie  $T$ .

Pour illustrer l'utilisation de cette méthode, on utilise ici :

### Cas a) Une topologie discrète restreinte

$E = \{ a, b, c, d, e \}$  et  $T = \{ E, \emptyset, \{a\}, \{c, d\}, \{a, c, d\}, \{b, c, d, e\} \}$   
Avec  $A = \{b, c, d\}$ ,  $B = \{b\}$  et  $C = \{a, c\}$

### Cas b) Une topologie usuelle

$E = \mathbb{R}$  et  $T = \{ \mathbb{R}, \emptyset, \text{tous les ouverts de } \mathbb{R} \}$   
Avec  $A = [a, b]$ ,  $B = ]a, b[$  et  $C = [a, b[$

**1)** On commence par vérifier qu'on étudie bien l'adhérence et la frontière d'un sous ensemble  $A$  d'un espace topologique  $E$  et non pas l'adhérence et la frontière d'un espace topologique  $E$  tout entier.

**2)** On identifie bien tous les **ouverts** de  $E$

Dans le cas a), les ouverts sont :  
 $E, \emptyset, \{a\}, \{c, d\}, \{a, c, d\}$  et  $\{b, c, d, e\}$

Dans le cas b), les ouverts sont :  
 $\mathbb{R}, \emptyset$ , tous les intervalles  $]a, b[$  de  $\mathbb{R}$  ainsi que les unions et intersections de ces intervalles.

**3)** On identifie tous les **fermés** de  $E$  (c'est à dire les complémentaires des ouverts de  $E$ )

Dans le cas a), les fermés sont :  
 $E, \emptyset, \{b, c, d, e\}, \{a, b, e\}, \{b, e\}$  et  $\{a\}$

Dans le cas b), les fermés sont :  
 $\mathbb{R}, \emptyset$ , tous les intervalles  $[a, b]$  de  $\mathbb{R}$  ainsi que les unions et intersections de ces intervalles.

**4)** On identifie l'**intérieur** des sous-ensembles  $A$ ,  $B$  et  $C$ ; c'est le plus grand ouvert qui est contenu dans chacun d'eux.

Dans le cas a), les plus grands ouverts contenus dans  $A, B$  et  $C$  sont respectivement :

$\{c, d\}, \emptyset$  et  $\{a\}$  donc :

$\text{Int}(A) = \{c, d\}$ ,  $\text{Int}(B) = \emptyset$  et  $\text{Int}(C) = \{a\}$

Dans le cas b), les intérieurs de A, B et C sont  $]a, b[$

$\text{Int}(A) = \text{Int}(B) = \text{Int}(C) = ]a, b[$

**5)** On identifie l'**extérieur** de A, B et C ; c'est l'intérieur de leur complémentaire donc le plus grand ouvert contenu dans leur complémentaire.

Dans le cas a), les complémentaires de A, B et C sont :

$\{a, e\}$ ,  $\{a, c, d, e\}$  et  $\{b, d, e\}$

Le plus grand ouvert contenu dans le complémentaire de A, B et C est respectivement :

$\{a\}$ ,  $\{a, c, d\}$  et  $\emptyset$  donc :

$\text{Ext}(A) = \{a\}$ ,  $\text{Ext}(B) = \{a, c, d\}$  et  $\text{Ext}(C) = \emptyset$

Dans le cas b), Les complémentaires de A, B et C dans E sont respectivement  $] - \infty, a[ \cup ]b, +\infty[$ ,  $] - \infty, a[ \cup ]b, +\infty[$  et  $] - \infty, a[ \cup ]b, +\infty[$  donc :

$\text{Ext}(A) = \text{Ext}(B) = \text{Ext}(C) = ] - \infty, a[ \cup ]b, +\infty[$

**6)** On identifie la **frontière** de A, B et C ; c'est l'ensemble des points qui n'appartiennent ni à l'intérieur, ni à l'extérieur de A, B et C.

Dans le cas a),  $\text{Fr}(A) = \{b, e\}$ ,  $\text{Fr}(B) = \{b, e\}$  et  $\text{Fr}(C) = \{b, c, d, e\}$ .

Dans le cas b),  $\text{Fr}(A) = \text{Fr}(B) = \text{Fr}(C) = \{\{a\}, \{b\}\}$

**7)** On identifie l'**adhérence** de A, B et C qui est l'intersection des fermés contenant respectivement A, B et C ou l'union de l'intérieur et de la frontière de A, B et C

Dans le cas a) :

Les fermés contenant A sont  $\{b, c, d, e\}$  et E donc l'adhérence de A est  $\{b, c, d, e\}$

Les fermés contenant B =  $\{b\}$  sont E,  $\{b, c, d, e\}$ ,  $\{a, b, e\}$  et  $\{b, e\}$  donc l'adhérence de B est  $\{b, e\}$

Le seul fermé contenant C =  $\{a, c\}$  est E donc l'adhérence de C est E

Dans le cas b), les fermés sont :

$\mathbb{R}$ ,  $\emptyset$ , tous les intervalles  $[a, b]$  de  $\mathbb{R}$  ainsi que les unions et intersections de ces intervalles.

L'adhérence de A, B ou C est donc  $[a, b]$ .



## Chapitre 3

# Propriétés d'un espace topologique

### ► **Ce qu'il faut savoir**

- 1 - Séparation
- 2 - Recouvrement
- 3 - Densité
- 4 - Compacité
- 5 - Connexité

### ► **Exemples**

### ► **Questions-réponses**



## Ce qu'il faut savoir

### 1) Séparation

Un espace topologique  $(E, T)$  est dit séparé si quels que soient deux points distincts  $x$  et  $y$  de  $E$ , il existe un voisinage  $U(x)$  et un voisinage  $V(y)$  dont l'intersection est l'ensemble vide.

$$\forall x \text{ et } y \in E \exists U(x) \text{ et } V(y) \text{ tels que } U(x) \cap V(y) = \emptyset$$

En topologie, la séparation (ou la propriété de séparation) est un concept important qui décrit la manière dont les points d'un espace topologique peuvent être séparés les uns des autres à l'aide de certaines propriétés topologiques.

Plus précisément, deux points dans un espace topologique sont dits séparés s'ils peuvent être entourés par des ensembles ouverts qui ne contiennent pas l'autre point. Un espace topologique est dit séparé (ou de Hausdorff) si tous les points distincts de l'espace peuvent être séparés de cette manière.

### 2) Recouvrement

Soit un espace topologique  $(E, T)$  et soit  $A$  un sous-ensemble de  $E$ . On appelle recouvrement de  $A$  un ensemble de parties de  $E$  tel que tout point de  $A$  appartient à l'une de ces parties.

En d'autres termes, si on prend l'union de toutes les parties  $B_i$  de  $E$ , faisant le recouvrement, on obtient un ensemble qui contient  $A$ .

$$\{B_i : i \in I\} \text{ est un recouvrement de } A \Rightarrow A \subseteq \cup B_i$$

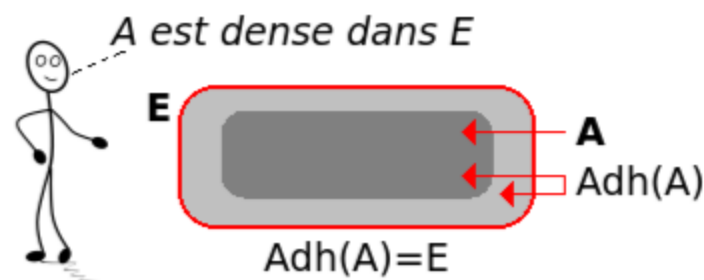
Si le nombre de parties qui recouvrent  $A$  est fini, on dit que le recouvrement est fini. Si chacune des parties de  $E$  qui recouvrent  $A$  est ouverte, on dit que le recouvrement est ouvert.

### 3) Densité

Dans un espace topologique  $(E, T)$ , un sous-ensemble  $A$  de  $E$  est dit dense dans  $E$  si et seulement si l'adhérence de  $A$  est égale à  $E$ .

$$A \text{ dense dans } E \Leftrightarrow \text{Adh}(A) = E$$

En topologie, la densité est une propriété d'un sous-ensemble d'un espace topologique qui indique à quel point ce sous-ensemble comporte des éléments nombreux et serrés. Plus précisément, un sous-ensemble  $A$  d'un espace topologique  $E$  est dit dense dans  $E$  si chaque point de  $E$  est adhérent à  $A$ , c'est-à-dire que chaque voisinage de chaque point de  $E$  contient au moins un point de  $A$ .



Intuitivement, cela signifie que les points de  $A$  sont "proches" de tous les points de  $E$ , et que tout point de  $E$  peut être approché arbitrairement près par des points de  $A$ .

Par exemple, le sous ensemble  $\mathbb{Q}$  des nombres rationnels est dense dans l'ensemble  $\mathbb{R}$  des réels.

$$\text{Int}(\mathbb{Q}) = \emptyset, \text{Fr}(\mathbb{Q}) = \mathbb{Q}, \text{Adh}(\mathbb{Q}) = \text{Adh}(\mathbb{R} - \mathbb{Q}) = \mathbb{R}$$

### 4) Compacité

Un espace topologique  $E$  est dit compact s'il est séparé et si tout recouvrement ouvert (fini ou infini) de  $E$  admet au moins un sous-recouvrement fini par des ouverts.

Pour qu'un espace topologique  $E$  soit compact, il ne suffit pas qu'il existe un recouvrement fini de  $E$ ; il faut que n'importe quel recouvrement de  $E$  (fini ou infini) contienne un sous recouvrement

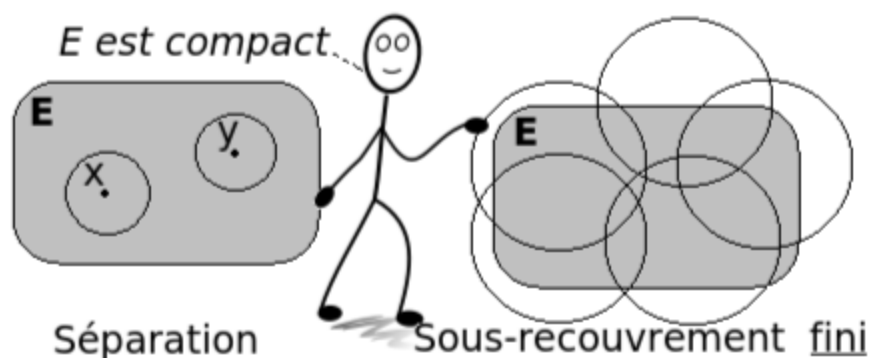
**fini** de  $E$ . C'est pourquoi  $\mathbb{R} = ]-\infty, +\infty[$  n'est pas compact mais un intervalle fermé  $[a,b]$  de  $\mathbb{R}$  est compact.

Dans un espace topologique  $(E, T_E)$  compact, un sous ensemble  $A$  de  $E$  est compact si, muni de la topologie  $T_A$  induite de  $T_E$ , il constitue lui même un espace topologique compact  $(A, T_A)$ .

Par exemple, l'espace  $(\mathbb{R}, T_{usu})$  est séparé, mais n'est pas compact. En effet, si par exemple on considère la famille  $\{]-n, +n[ : n \in \mathbb{N}\}$ , celle-ci constitue un recouvrement ouvert (infini) de  $\mathbb{R}$  qui ne contient aucun sous-recouvrement fini de  $\mathbb{R}$ . Donc l'ensemble  $\mathbb{R}$  muni de la topologie euclidienne n'est pas compact.

De même tout intervalle  $]a,b[$  de  $\mathbb{R}$  n'est pas compact car on peut trouver un exemple de recouvrement infini ouvert de  $]a,b[$  duquel on ne sait pas extraire de recouvrement fini de  $]a,b[$ .

En revanche, en utilisant une propriété importante des nombres réels, à savoir que tout ensemble borné et croissant de nombres réels a une limite finie, on peut démontrer que tout intervalle fermé  $[a,b]$  de  $\mathbb{R}$  est compact (le théorème de Heine-Borel stipule que tout sous-ensemble borné de  $\mathbb{R}^n$  est compact si et seulement s'il est fermé et borné).



## 5) Connexité

Un espace topologique  $(E, T)$  est dit connexe, s'il n'existe pas de partition de  $E$  formée de deux parties ouvertes, disjointes et non vides de  $E$ .

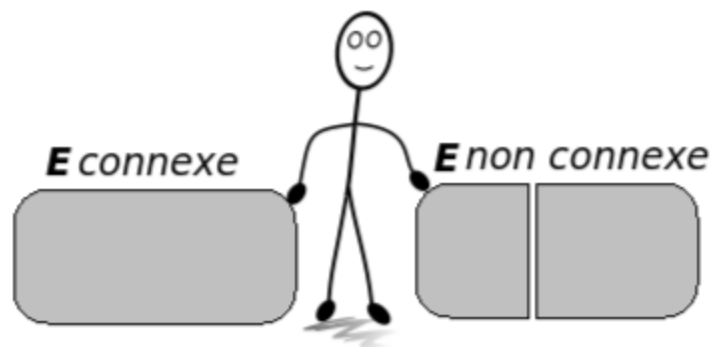
Une partie  $F$  d'un ensemble  $E$  muni de la topologie  $T_{usu}$  est appelée partie connexe de  $E$  si l'espace topologique  $F, T_F$  muni de la



topologie  $T_F$  induite de  $T_{usu}$  est connexe.

Avec la topologie euclidienne, l'ensemble  $\mathbb{R}$  des nombres réels est connexe. Un intervalle quelconque  $[a,b]$ ,  $]a,b[$ ,  $[a,b[$  ou  $]a,b]$  de  $\mathbb{R}$  est connexe.

En topologie, la connexité est une propriété qui indique si un espace topologique est constitué d'un seul morceau ou de plusieurs morceaux disjoints. Un espace topologique connexe ne peut pas être partitionné en deux sous-ensembles non vides disjoints.



Intuitivement, cela signifie qu'il n'y a pas de "trou" dans l'espace qui le divise en deux parties distinctes. Autrement dit, tout chemin continu dans l'espace ne peut pas "sauter" d'une partie à l'autre sans passer par un point intermédiaire.



## Exemples

### 1) Séparation

#### 1.1) Espace topologique discret restreint non séparé

Un espace topologique  $(E, T_{dir})$ , muni d'une topologie discrète restreinte  $T_{dir}$  peut être séparé ou non selon la topologie choisie

Considérons l'ensemble  $E = \{a, b, c\}$  muni de la topologie  $T_{dir} = \{\{a\}, \{a, b\}, E\}$ . Avec cette topologie, les seuls ouverts sont l'ensemble vide, l'ensemble  $\{a\}$ , l'ensemble  $\{a, b\}$  et l'ensemble  $E$  lui-même. Cette topologie est bien une topologie discrète restreinte de  $E$ .

Cependant, l'espace topologique  $(E, T_{dir})$  n'est pas séparé, car les

points  $a$  et  $b$  ne peuvent pas être séparés par des ouverts disjoints dans la topologie  $T_{dir}$ .

Donc, l'espace topologique  $(E, T_{dir})$ , où  $E = \{a, b, c\}$  et  $T_{dir} = \{\{a\}, \{a, b\}, E\}$ , n'est pas séparé.

### 1.2) Espace topologique discret restreint séparé

En revanche, considérons l'ensemble  $E = \{a, b, c\}$  muni de la topologie  $T_{dir} = \{\{a\}, \{b\}, \{c\}, \{a, b\}, \{a, c\}, E\}$ . Avec cette topologie,  $T_{dir}$  est une topologie discrète restreinte de  $E$ .

L'espace topologique  $(E, T_{dir})$  est séparé.

En effet, pour tout couple de points distincts  $x, y$  de  $E$ , on peut trouver deux ouverts disjoints contenant  $x$  et  $y$  respectivement. Par exemple, si  $x = a$  et  $y = b$  (ou vice versa), alors  $\{a\}$  et  $\{b\}$  sont deux ouverts disjoints de  $T_{dir}$  contenant  $x$  et  $y$  respectivement. Si  $x = a$  et  $y = c$  (ou vice versa), alors  $\{a\}$  et  $\{c\}$  sont deux ouverts disjoints de  $T_{dir}$  contenant  $x$  et  $y$  respectivement. Enfin, si  $x = b$  et  $y = c$ , alors  $\{b\}$  et  $\{c\}$  sont deux ouverts disjoints de  $T_{dir}$  contenant  $x$  et  $y$  respectivement.

Donc, l'espace topologique  $(E, T_{dir})$ , où  $E = \{a, b, c\}$  et  $T_{dir} = \{\{a\}, \{b\}, \{c\}, \{a, b\}, \{a, c\}, E\}$ , est séparé.

### 1.3) Espace topologique discret

Un espace topologique  $(E, T_{dis})$  qui est doté d'une topologie discrète  $T_{dis} = \mathcal{P}(E)$  est toujours séparé.

En effet, la topologie discrète est la plus fine possible sur l'ensemble  $E$ , car tout sous-ensemble de  $E$  est un ouvert.

Ainsi, pour tout couple de points distincts  $x, y$  de  $E$ , on peut trouver deux ouverts disjoints contenant  $x$  et  $y$  respectivement.

En effet, on peut prendre les deux singletons  $x$  et  $y$ , qui sont des ouverts dans la topologie discrète, et qui sont clairement disjoints puisque  $x$  et  $y$  sont distincts. Par conséquent, tout espace topologique muni de la topologie discrète est séparé.

### 1.3) Espace métrique

Tout espace métrique est séparé et en particulier :

- l'espace  $\mathbb{R}^n$  avec la métrique standard (espace euclidien) ;
- les espaces vectoriels normés ;

- les espaces de Banach ;
- les espaces de Hilbert.

## 2) Recouvrement

### 2.1) Espace topologique discret

Soit l'espace topologique discret  $E = \{a, b, c\}$  muni de la topologie  $T_{dis} = \mathcal{P}(E)$ .

Les familles suivantes représentent des recouvrements de  $E$ .

- recouvrement de  $E$  avec  $E = \{a, b, c\}$  (recouvrement trivial)
- recouvrement avec les singletons :  $\{ \{a\}, \{b\}, \{c\} \}$  (recouvrement trivial)
- recouvrement avec 2 ouverts :  $\{ \{a, b\}, \{c\} \}$
- recouvrement avec 3 ouverts :  $\{ \{a, b\}, \{a, c\}, \{b, c\} \}$
- recouvrement maximal :  $\{ \{a\}, \{b\}, \{c\}, \{a, b\}, \{a, c\}, \{b, c\}, \{a, b, c\}, \emptyset \}$

### 2.2) Espace topologique discret restreint

Soit l'espace topologique discret restreint  $E = \{a, b, c\}$  muni de la topologie  $T_{dir} = \{E, \emptyset, \{a\}, \{a, b\}\}$ .

$E = \{a, b, c\}$  est le seul recouvrement possible de  $E$  (recouvrement trivial)

### 2.3) Espace Euclidien

Soit l'espace topologique euclidien usuel  $\mathbb{R}$

La famille  $\{]-n, +n[ : n \in \mathbb{N} \}$  constitue un exemple de recouvrement de  $\mathbb{R}$ . Dans cet exemple, le recouvrement est constitué d'un nombre infini d'ouverts.

Les sous-ensembles  $]-\infty, a]$  et  $[a, +\infty[$  forment un recouvrement de  $\mathbb{R}$ . Dans cet exemple, le recouvrement est constitué de deux fermés.

Soit l'intervalle ouvert  $A = ]0, 1[$  de  $\mathbb{R}$ .

La famille  $F$  suivante forme un recouvrement de  $A$ , constitué d'un nombre infini d'ouverts :

$$F = \{ ]\frac{1}{3}, 1[, ]\frac{1}{4}, \frac{1}{2}[, ]\frac{1}{5}, \frac{1}{3}[, \dots \}$$

$$F = A = \bigcup_{i=1}^{\infty} ( ]\frac{1}{n+2}, \frac{1}{n}[ )$$

### 3) Densité

#### 3.1) Espace topologique discret restreint

Dans un espace topologique discret restreint  $E$ , tous les sous-ensembles de  $E$  ne sont pas des ouverts. Certains sous ensembles de  $E$  peuvent être denses ou non dans  $E$ . Soient :

$$E = \{a, b, c, d, e\}$$

$$T_{dis} = \{E, \emptyset, \{a\}, \{a, b\}, \{a, c, d\}, \{a, b, c, d\}, \{a, b, e\}\}$$

$$A = \{a\} \text{ et } B = \{c, e\}$$

Avec cette topologie :

- Les ouverts de  $E$  sont :  $E, \emptyset, \{a\}, \{a, b\}, \{a, c, d\}, \{a, b, c, d\}, \{a, b, e\}$
- Les fermés de  $E$  sont :  $\emptyset, E, \{b, c, d, e\}, \{c, d, e\}, \{b, e\}, \{e\}, \{c, d\}$

Le plus petit fermé contenant  $\{a\}$  est  $E$ . Donc l'adhérence de  $\{a\}$  est égale à  $E$  et  $\{a\}$  est dense dans  $E$ .

En revanche l'adhérence de  $B$  est  $\{c, d, e\}$  non égal à  $E$ . Donc  $B$  n'est pas dans dans  $E$ .

#### 3.2) Espace euclidien

- L'ensemble des nombres algébriques est dense dans  $\mathbb{R}$

Les nombres algébriques sont les solutions d'un polynôme à coefficients entiers. En effet, pour tout nombre réel  $x$ , il existe un polynôme à coefficients entiers dont  $x$  est une solution. On peut alors trouver une suite de nombres algébriques qui converge vers  $x$ .

- L'ensemble  $\mathbb{Q}$  des nombres rationnels est dense dans  $\mathbb{R}$ .
- L'ensemble des suites de décimales finies est également dense dans  $\mathbb{R}$ .

L'ensemble des suites de décimales finies est l'ensemble des nombres réels qui ont une représentation décimale finie. Pour tout intervalle  $]a, b[$  de  $\mathbb{R}$ , on peut construire une suite de décimales finies qui appartient à  $]a, b[$ .

Par exemple, pour l'intervalle  $]0,1[$ , on peut construire la suite de décimales finies  $0.1, 0.01, 0.001, \dots$ , qui converge vers zéro.

## 4) Compacité

### 4.1) Espace topologique discret

Tout espace topologique discret (pas discret restreint) fini est compact, car chaque élément constitue un ouvert et, de ce fait, tout recouvrement ouvert admet un sous-recouvrement fini.

Cependant, si l'espace topologique discret est infini, il n'est pas nécessairement compact.

Par exemple L'ensemble  $\mathbb{N}$  des entiers naturels avec la topologie discrète n'est pas compact, car il existe un recouvrement ouvert de  $\mathbb{N}$  qui n'a pas de sous-couverture finie.

En effet, on peut considérer le recouvrement ouvert de  $\mathbb{N}$  donné par l'ensemble  $\{\{n\} : n \in \mathbb{N}\}$ , c'est-à-dire l'ensemble des singletons.

Ce recouvrement couvre tout  $\mathbb{N}$ . Il n'a pas de sous-couverture finie, car tout sous-ensemble fini de  $\mathbb{N}$  ne contient qu'un nombre fini d'éléments, et donc ne peut couvrir tout  $\mathbb{N}$ . En conclusion, l'ensemble  $\mathbb{N}$  avec la topologie discrète n'est pas compact.

### 4.2) Espace euclidien

L'espace  $(\mathbb{R}, \mathcal{T}_{usu})$  n'est pas compact.

Par exemple, si on considère la famille  $\{]-n, +n[ : n \in \mathbb{N}\}$ , celle-ci constitue un recouvrement ouvert (infini) de  $\mathbb{R}$  qui ne contient aucun sous-recouvrement fini de  $\mathbb{R}$ .

De même tout intervalle  $A=]a,b[$  ou  $A=]a,b]$  de  $\mathbb{R}$  n'est pas compact car on peut trouver un exemple de recouvrement infini ouvert de  $A$  duquel on ne sait pas extraire de recouvrement fini.

Par exemple,  $I_n = ]1/n, 1]$  est une suite d'ouverts qui recouvre le sous-ensemble  $]0,1]$  mais dont on ne peut pas extraire un recouvrement fini.

En revanche, en utilisant une propriété importante des nombres réels, à savoir que tout ensemble borné et croissant de nombres réels a une limite finie, on peut démontrer que tout intervalle fermé  $[a,b]$  de  $\mathbb{R}$  est compact (le théorème de Heine-Borel stipule que tout sous-ensemble borné de  $\mathbb{R}^n$  est compact si et seulement s'il est

fermé et borné).  
Par exemple,  $[0,1]$  est compact.

## 5) Connexité

### 5.1) Espace topologique discret

Un espace topologique discret n'est pas connexe car il peut toujours être partitionné en deux sous-ensembles ouverts disjoints et non vides..

Par l'exemple l'espace  $E=\{a,b,c\}$  n'est pas connexe. En effet, il peut être partitionné par les deux ouverts  $\{a\}$  et  $\{b,c\}$

### 5.2) Espace euclidien

$\mathbb{R}$  est connexe. Il ne peut pas être partitionné en deux ouverts.

L'espace  $\mathbb{R}^*$  n'est pas connexe car il peut être partitionné en deux ouverts : Par exemple :  $\mathbb{R}^* = ]-\infty, 0[ \cup ]0, +\infty[$

Tout intervalle (ouvert, fermé ou semi-ouvert) de  $\mathbb{R}$  est connexe.

$\mathbb{R}^n$  est connexe

Toute boule (ouverte, fermée, semi-ouverte) de  $\mathbb{R}^n$  est connexe.



## Questions-réponses

### 1) Espace euclidien, espace métrique

- *Quelle est la différence entre un espace euclidien et un espace métrique ?*

L'espace euclidien est un exemple d'espace métrique, mais il existe d'autres espaces métriques qui ne sont pas des espaces euclidiens.

Plus précisément, un espace métrique est un ensemble muni d'une fonction appelée métrique, qui mesure la distance entre deux points de l'espace. Cette fonction doit satisfaire certaines propriétés, telles que la symétrie, la non-négativité et l'inégalité triangu-

laire. La métrique permet de définir une notion de convergence, ce qui permet de parler de limites et de continuité dans l'espace métrique.

D'un autre côté, l'espace euclidien est un exemple spécifique d'espace métrique, qui est défini comme l'espace de tous les points à  $n$  dimensions, muni de la métrique standard définie par la distance euclidienne. Cette métrique mesure la distance entre deux points comme la longueur du segment de droite qui relie ces deux points. L'espace euclidien est un exemple important d'espace métrique, mais il n'est pas le seul.

En résumé, l'espace euclidien est un exemple particulier d'espace métrique, mais il existe d'autres espaces métriques qui ne sont pas euclidiens. La métrique est une notion mathématique fondamentale qui permet de définir une notion de distance dans un espace, ce qui est important pour étudier les notions de convergence et de continuité.

## 2) Espaces topologiques

- *Quelle est la différence entre un espace topologique, un espace métrique, un espace vectoriel normé, un espace de Banach et un espace de Hilbert ?*

Les espaces topologiques, métriques, vectoriels normés, de Banach et de Hilbert sont des structures mathématiques différentes, qui ont des propriétés et des applications différentes.

Un espace topologique est un ensemble muni d'une topologie, c'est-à-dire d'une collection d'ensembles dits ouverts, qui satisfait à certaines propriétés. Cette structure permet de définir des notions de continuité, de convergence, de compacité, etc. Les exemples d'espaces topologiques comprennent les espaces discrets, les espaces de dimension finie, les espaces de fonctions continues, etc.

Un espace métrique est un espace topologique dans lequel on a, en plus, défini une distance entre les points. Cette distance doit satisfaire certaines propriétés, comme la symétrie, la positivité et l'inégalité triangulaire.

Les exemples d'espaces métriques comprennent l'espace euclidien, les espaces de suites convergentes, etc.

Un espace vectoriel normé est un espace vectoriel muni d'une norme, c'est-à-dire d'une fonction qui associe à chaque vecteur une valeur positive qui mesure sa taille. Cette structure permet de définir des notions de convergence, de continuité, de compacité, etc. Les exemples d'espaces vectoriels normés comprennent l'espace des fonctions continues sur un intervalle, l'espace des suites convergentes, etc.

Un espace de Banach est un espace vectoriel normé complet, c'est-à-dire un espace vectoriel normé dans lequel toutes les suites de Cauchy convergent vers un élément de l'espace. Cette structure permet de définir des notions de limite, de continuité uniforme, de compacité, etc.

Les exemples d'espaces de Banach comprennent l'espace des fonctions continues sur un intervalle, l'espace des suites convergentes, etc.

Un espace de Hilbert est un espace vectoriel normé complet dans lequel la norme est définie à partir d'un produit scalaire, qui est une fonction bilinéaire symétrique et définie positive. Cette structure permet de définir des notions de projection, d'orthogonalité, de complétude, etc. Les exemples d'espaces de Hilbert comprennent l'espace euclidien, l'espace des fonctions carré-intégrables sur un intervalle, etc.



En résumé, chaque type d'espace a des propriétés et des applications différentes, en fonction de sa structure mathématique sous-jacente.

Les espaces topologiques fournissent un cadre général pour étudier la continuité et la convergence, tandis que les espaces métriques, normés, de Banach et de Hilbert fournissent des structures plus précises pour étudier des phénomènes spécifiques.



Chaque espace mathématique est inclus dans l'espace qui le suit dans l'ordre suivant :

- Tout espace métrique est un espace topologique ;
- Tout espace vectoriel normé est un espace métrique ;
- Tout espace de Banach est un espace vectoriel normé complet ;
- Tout espace de Hilbert est un espace de Banach muni d'un produit scalaire.

Ainsi, un espace de Hilbert est à la fois un espace de Banach et un espace vectoriel normé, qui sont eux-mêmes des espaces topologiques. Tout espace de Banach est également un espace vectoriel normé et un espace topologique, et ainsi de suite.

Ces inclusions reflètent la hiérarchie de précision de la structure mathématique dans ces espaces. Plus la structure est précise (par exemple, avec un produit scalaire), plus les propriétés mathématiques que l'on peut déduire de l'espace sont précises.

- *Les espaces de Banach et de Hilbert sont ils des espaces vectoriels normés ?*

Oui, les espaces de Banach et de Hilbert sont des exemples d'espaces vectoriels normés.

En effet, ces espaces sont définis comme des espaces vectoriels munis d'une norme, qui est une fonction qui associe à chaque élément du vecteur une valeur positive et qui satisfait certaines propriétés, comme la positivité, l'homogénéité et l'inégalité triangulaire.

- *Un espace fonctionnel est il toujours un espace topologique ?*

Un espace fonctionnel quelconque n'est pas nécessairement un espace topologique. Les espaces fonctionnels sont des ensembles de fonctions qui peuvent être équipés de différentes structures mathématiques, telles que des normes, des métriques ou des topologies.

Cependant, un espace fonctionnel peut généralement être naturellement équipé d'une topologie. Par exemple, l'espace des fonctions continues sur un intervalle fermé et borné de la droite réelle est un espace topologique lorsque l'on considère la topologie de la convergence uniforme.

En résumé, cela dépend du contexte et de la structure mathématique spécifique considérée pour l'espace fonctionnel.

- *Y a-t'il des espaces fonctionnels qui soient des espaces métriques mais qui ne soient pas des espaces vectoriels normés ?*

Oui, il existe des espaces fonctionnels qui sont des espaces métriques mais qui ne sont pas des espaces vectoriels normés. Un exemple courant est l'espace des fonctions continues définies sur un intervalle borné et équipé de la distance de la convergence uniforme. Cet espace est métrique, car la distance de la convergence uniforme satisfait les axiomes d'une distance, mais il n'est pas un espace vectoriel normé car il ne satisfait pas les propriétés nécessaires pour définir une norme sur cet espace.

- *Y a-t'il des espaces fonctionnels qui soient des espaces topologiques mais qui ne soient pas des espace métriques ?*

Oui, il existe en effet des espaces fonctionnels qui sont des espaces topologiques mais qui ne sont pas des espaces métriques. En général, la topologie d'un espace fonctionnel est définie à l'aide d'une notion de convergence pour les suites ou les familles de fonctions, mais cette convergence ne satisfait pas nécessairement les axiomes d'une distance, tels que la symétrie ou l'inégalité triangulaire.

Un exemple classique d'espace fonctionnel topologique qui n'est pas métrisable est l'espace des distributions qui est l'espace des fonctions linéaires continues sur un espace de fonctions test (espace des fonctions lisses à support compact par exemple).

La convergence dans cet espace est définie par la notion de convergence faible, qui consiste à dire qu'une suite de distributions converge vers une distribution donnée si et seulement si elle converge faiblement sur toutes les fonctions test. Cette notion de convergence ne satisfait pas les axiomes d'une distance, et par conséquent, l'espace des distributions n'est pas métrisable.

En somme, il est donc possible qu'un espace fonctionnel soit un espace topologique sans être un espace métrique, car il existe différentes manières de définir une topologie sur un ensemble de fonctions sans avoir à recourir à une distance métrique.



## Chapitre 4

# Espace métrique

► **Ce qu'il faut savoir**

1 - Qu'est ce qu'un espace métrique ?

► **Exemples**

► **Questions-réponses**



## Ce qu'il faut savoir

### 1) Qu'est ce qu'un espace métrique ?

Un espace métrique est un type d'espace mathématique qui permet de mesurer la distance entre deux points.

Un espace métrique est un ensemble  $E$  muni d'une fonction appelée métrique  $d$ , qui associe à chaque paire de points  $x$  et  $y$  de  $E$  une valeur non négative  $d(x,y)$  qui représente la distance entre  $x$  et  $y$ .

Pour qu'une fonction  $d$  soit une métrique sur un ensemble  $E$ , elle doit vérifier les propriétés suivantes pour tout  $x, y$  et  $z$  de  $E$  :

- $d(x,y) \geq 0$ , la distance entre deux points doit être positive ou nulle et elle est égale à zéro si et seulement si  $x = y$ .
- $d(x,y) = d(y,x)$ , la distance est symétrique.
- $d(x,y) \leq d(x,z) + d(z,y)$ , la distance entre  $x$  et  $y$  est inférieure ou égale à la somme des distances entre  $x$  et  $z$ , et entre  $z$  et  $y$ .

L'espace métrique le plus simple est l'espace euclidien, dans lequel la métrique est la distance euclidienne entre deux points, telle que nous la connaissons en géométrie plane ou en géométrie dans l'espace.

Il existe de nombreux autres exemples d'espaces métriques, tels que les espaces de Banach et de Hilbert, les espaces de suites et les espaces de fonctions.

En résumé :

Soient  $E$  un ensemble quelconque,  $x, y$  et  $z$  des points quelconques de  $E$  et  $d(x,y)$  une fonction de  $E \times E$  dans  $\mathbb{R}_+$ .

L'espace  $(E, d)$  est appelé espace métrique si les conditions suivantes sont remplies :

(C1) :  $d(x,y) = 0 \Leftrightarrow x = y$  (séparation)

(C2) :  $d(x,y) = d(y,x)$  (symétrie)

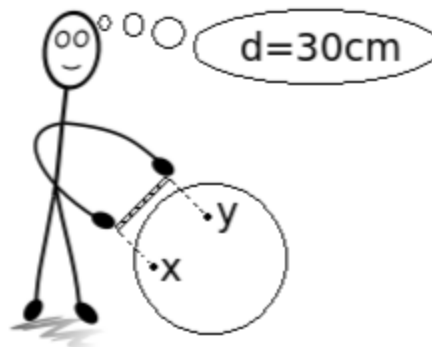
(C3) :  $d(x,y) \leq d(x,z) + d(z,y)$  (inégalité triangulaire)



## Exemples

### 1) Espaces courants

Pour qu'un ensemble soit un espace métrique, il faut qu'il soit doté d'une distance telle que définie précédemment. Voici quelques exemples d'espaces métriques courants :



- L'espace euclidien à  $n$  dimensions, muni de la distance euclidienne qui mesure la distance entre deux points en prenant la racine carrée de la somme des carrés des différences de coordonnées.
- L'espace des fonctions continues sur un intervalle donné, muni de la distance de la convergence uniforme qui mesure la différence maximale entre les valeurs de deux fonctions.
- L'espace des suites de nombres réels ou complexes, muni de la distance de la convergence uniforme qui mesure la différence maximale entre les termes correspondants de deux suites.
- L'espace des matrices carrées de taille  $n \times n$ , muni de la distance de la norme de Frobenius qui mesure la racine carrée de la somme des carrés des éléments de la matrice.
- L'espace des graphes, muni de la distance de la longueur du plus court chemin entre deux sommets.
- L'espace de Banach, qui est un espace vectoriel normé complet, muni de la norme qui mesure la taille des vecteurs.
- L'espace de Hilbert, qui est un espace de Banach muni d'un produit scalaire qui mesure l'angle entre deux vecteurs.
- L'espace des polynômes, muni de la distance de la convergence uniforme sur un intervalle donné.

- L'espace de Lebesgue, qui est un espace de fonctions intégrables muni de la distance de la convergence en norme  $L_p$  qui mesure la différence de la norme entre deux fonctions.
- L'espace de Sobolev, qui est un espace de fonctions dérivables muni de la distance de la norme Sobolev qui mesure la norme des dérivées de la fonction.
- L'espace des distributions, qui est un espace de fonctions généralisées muni de la distance de la convergence en dualité avec des fonctions test.
- L'espace des séries de Fourier, muni de la distance de la convergence uniforme qui mesure la différence maximale entre les valeurs de deux séries.
- L'espace des suites d'entiers naturels, muni de la distance de la métrique de Hamming qui mesure le nombre de positions où deux suites diffèrent.
- L'espace de la géométrie hyperbolique, qui est un espace courbe de dimension supérieure à deux muni d'une métrique non euclidienne.
- L'espace des arbres, muni de la distance de la longueur du plus court chemin entre deux nœuds.
- L'espace des fonctions holomorphes sur un domaine donné (distance de la convergence uniforme).
- L'espace des suites d'éléments d'un groupe, muni de la distance de la convergence uniforme sur des ensembles finis de générateurs.

Il existe de nombreux autres exemples d'espaces métriques. Chacun possède sa propre métrique associée. La théorie des espaces métriques est une branche importante des mathématiques qui étudie les propriétés et les comportements de ces espaces.

## 2) Espace discret

Tout espace topologique discret  $E$  peut être métrisable, c'est à dire être un espace métrique.

Il suffit en effet de le doter de la distance "triviale"  $d(x,y)=0$  si  $x=y$  et  $d(x,y)=1$  sinon, quels que soient  $x,y$  et  $z$  appartenant à  $E$ .

Par exemple :

L'espace discret  $E = \{a, b, c\}$ , muni de la topologie  $T_{dis} = \mathcal{P}(E)$  et doté de la distance triviale ( $d(x, y) = 0$  si  $x = y$  et  $d(x, y) = 1$  sinon), est un espace métrique.

- $d(a, a) = d(b, b) = d(c, c) = 0$
- $d(a, b) = d(a, c) = d(b, c) = d(b, a) = d(c, a) = d(c, b) = 1$
- $d(a, c) = 1 \leq d(a, b) + d(b, c) = 2$

### 3) Espace $\mathbb{R}^n$

Soient  $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ ,  $y = (y_1, y_2, \dots, y_n)$  et  $z = (z_1, z_2, \dots, z_n)$  des points quelconques de  $\mathbb{R}^n$ .

L'espace  $\mathbb{R}^n$  peut être métrisable, c'est à dire transformé en un espace métrique, à l'aide des distances  $d_1, d_2, d_\infty$  suivantes :

- $d_1(x, y) = \sum_{i=1}^n |x_i - y_i|$
- $d_2(x, y) = \left( \sum_{i=1}^n (x_i - y_i)^2 \right)^{1/2}$
- $d_\infty(x, y) = \sup_{i=1, 2, \dots, n} (|x_i - y_i|)$

Les espaces  $(\mathbb{R}^n, d_1)$ ,  $(\mathbb{R}^n, d_2)$  et  $(\mathbb{R}^n, d_\infty)$  sont des espaces métriques.

### 4) Espace $C(a, b)$

Soit  $C([a, b])$  l'ensemble des fonctions à valeur dans  $\mathbb{R}$  et continues sur l'intervalle fermée  $[a, b]$ .

L'espace  $\mathbb{R}^n$  peut être transformé en un espace métrique, à l'aide des distances  $d_1, d_2, d_\infty$  suivantes :

- $d_1(f, g) = \int_a^b |f(x) - g(x)| dx$
- $d_2(f, g) = \left[ \int_a^b (f(x) - g(x))^2 dx \right]^{1/2}$
- $d_k(f, g) = \left[ \int_a^b (f(x) - g(x))^k dx \right]^{1/k}$
- $d_\infty(f, g) = \sup_{x \in [a, b]} (|f(x) - g(x)|)$

$(C([a, b]), d_1)$ ,  $(C([a, b]), d_2)$ ,  $(C([a, b]), d_k)$  et  $(C([a, b]), d_\infty)$  sont des espaces métriques.

## Questions-réponses

---

### 1) Espace topologique, Espace métrique

- *Tout ensemble peut-il être doté d'une topologie et tout ensemble peut-il être doté d'une métrique ?*

Oui. Tout ensemble peut être muni d'une topologie et tout ensemble peut également être muni d'une métrique. La topologie discrète est un exemple de topologie qui peut être définie sur n'importe quel ensemble, et la distance triviale est un exemple de métrique qui peut être définie sur n'importe quel ensemble.

### 2) Espace métrique, Espace vectoriel normé

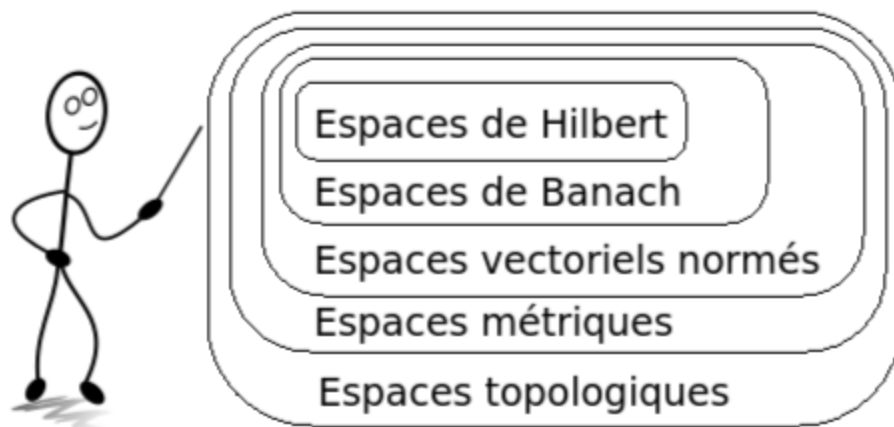
- *Quelle est la différence entre un espace métrique et un espace vectoriel normé ?*

Un espace métrique est un ensemble de points avec une distance (ou métrique) définie entre eux. La distance est une fonction qui attribue une valeur numérique positive à chaque paire de points de l'espace métrique, satisfaisant certaines propriétés, telles que la symétrie, la non-négativité, l'identité des indiscernables, et l'inégalité triangulaire.

Un espace vectoriel normé, quant à lui, est un ensemble de vecteurs avec une norme définie sur chaque vecteur. La norme est une fonction qui attribue une valeur numérique positive à chaque vecteur de l'espace vectoriel, satisfaisant certaines propriétés, telles que la non-négativité, l'homogénéité, et l'inégalité triangulaire.

La différence entre un espace métrique et un espace vectoriel normé réside dans la façon dont la structure de l'espace est définie : l'un est défini en termes de distance entre les points, tandis que l'autre est défini en termes de norme sur les vecteurs. Cependant, il est important de noter que tout espace vectoriel normé peut être muni d'une métrique induite par sa norme, mais l'inverse n'est pas toujours vrai.





En conclusion, un espace vectoriel normé est un espace métrique (il suffit d'utiliser la norme comme distance) mais tout espace métrique n'est pas un espace vectoriel.

### 3) Espace vectoriel normé, Espace de Banach

- *Quel est la différence entre un espace vectoriel normé et un espace de Banach ?*

Un espace vectoriel normé est un espace vectoriel équipé d'une norme qui satisfait certaines propriétés, telles que la non-négativité, l'homogénéité et l'inégalité triangulaire.

Les exemples les plus connus d'espaces vectoriels normés sont les espaces de fonctions continues, les espaces de suites et les espaces de matrices.

Un espace de Banach, quant à lui, est un espace vectoriel normé complet, c'est-à-dire que toutes les suites de Cauchy convergent vers un élément de l'espace. Autrement dit, tout espace de Banach est un espace vectoriel normé, mais tous les espaces vectoriels normés ne sont pas nécessairement des espaces de Banach.

La complétude est donc la principale différence entre un espace vectoriel normé et un espace de Banach. En effet, la complétude assure que toutes les suites convergentes dans l'espace convergent effectivement vers un élément de l'espace. Les espaces de Banach sont donc des espaces vectoriels normés qui "ne possèdent pas de trous", tandis que les espaces vectoriels normés non complets peuvent avoir des "trous" où des suites de Cauchy ne convergent pas.

#### 4) Espace vectoriel normé, Espace de Banach

- *Quel est la différence entre un espace de Banach et un espace de Hilbert ?*

Un espace de Hilbert est un espace vectoriel normé complet doté d'un produit scalaire, qui permet de mesurer l'angle entre deux vecteurs et de définir la notion de projection orthogonale. Les exemples les plus connus d'espaces de Hilbert sont les espaces de suites  $l^2$  et les espaces de fonctions  $L^2$ .

Un espace de Banach, quant à lui, est un espace vectoriel normé complet, mais il n'a pas nécessairement de produit scalaire. En d'autres termes, tout espace de Hilbert est un espace de Banach, mais l'inverse n'est pas vrai.

La principale différence entre un espace de Banach et un espace de Hilbert est donc que l'espace de Hilbert possède un produit scalaire qui permet de mesurer l'angle entre deux vecteurs et de définir des concepts tels que la projection orthogonale et la notion de distance minimale entre un point et un sous-espace. Cela conduit à une géométrie plus riche et plus naturelle dans l'espace de Hilbert, qui est souvent utilisée dans les applications en analyse fonctionnelle, en physique et en traitement du signal.



## Chapitre 5

# Espace vectoriel normé

► **Ce qu'il faut savoir**

1 - Qu'est ce qu'un espace vectoriel ?

1 - Espace vectoriel normé

► **Exemples**

► **Questions-réponses**



## Ce qu'il faut savoir

### 1) Qu'est ce qu'un espace vectoriel ?

Un espace vectoriel  $(E, +, \times)$  est un ensemble d'éléments appelés vecteurs, sur un corps  $K$  de scalaires, qui satisfait aux propriétés suivantes :

- La somme de deux vecteurs de  $E$  est un vecteur de  $E$ .
- Le produit d'un vecteur de  $E$  par un scalaire de  $K$  est un vecteur de  $E$ .
- L'addition de vecteurs est associative et commutative.
- Il existe un vecteur nul dans  $E$ , qui est élément neutre pour l'addition de vecteurs.
- Tout vecteur a un opposé, qui est l'élément inverse pour l'addition de vecteurs.
- La multiplication par des scalaires est distributive sur l'addition de vecteurs.
- La multiplication par des scalaires est associative et commutative.

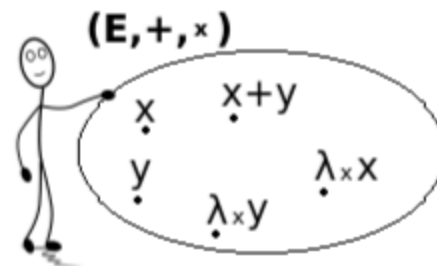
Soient :

- $K$  un corps (le corps  $\mathbb{R}$  ou  $\mathbb{C}$  par exemple)
- $E$  un ensemble muni d'une loi interne notée  $+$  et d'une loi externe (de  $K \times E$  dans  $E$ ) notée  $\times$
- $x, y, z$  des éléments quelconques de  $E$  et  $\lambda, \mu$  des éléments quelconques de  $K$

On dit que  $(E, +, \times)$  est un espace vectoriel sur  $K$  si :

1.  $(x + y) + z = x + (y + z)$  (associativité de  $+$ )
2.  $x + y = y + x$  (commutativité de  $+$ )
3.  $\exists e \in E, x + e = x$  ( $e$  élément neutre pour  $+$ )
4.  $\forall x \in E, \exists x' \in E, x + x' = e$  ( $x'$  élément inverse de  $x$  pour  $+$ )
5.  $\lambda.(x + y) = \lambda.x + \lambda.y$  (distributivité dans  $E$ )
6.  $(\lambda + \mu).x = \lambda.x + \mu.x$  (distributivité dans  $K$ )
7.  $\lambda.(\mu.x) = (\lambda\mu).x$  (associativité de  $\times$ )
8.  $1.x = x$  où  $1$  est (1 élément neutre pour  $\times$ )

Les espaces vectoriels sont utilisés dans de nombreux domaines des mathématiques et de la physique, tels que la géométrie, l'algèbre linéaire, la théorie des matrices, la théorie des groupes, la mécanique quantique, etc.



## 2) Espace vectoriel normé

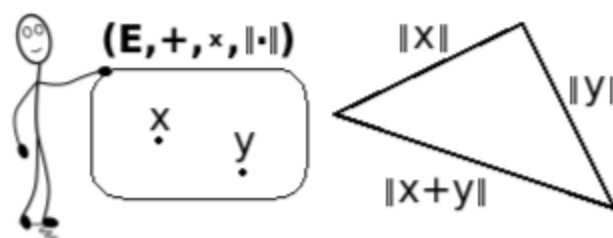
Un espace vectoriel  $(E, +, \cdot)$  sur un corps  $K$  est dit normé s'il est muni d'une norme. Une norme est une application Norme( $x$ ) de  $E$  dans  $\mathbb{R}_+$  qui vérifie les conditions suivantes quels que soient  $x, y$  appartenant à  $E$  et  $\lambda$  appartenant à  $K$  :

1. Norme( $x$ )=0  $\Rightarrow$   $x=0$  (séparation)
2. Norme( $\lambda \cdot x$ )=  $|\lambda| \cdot$ Norme( $x$ ) (homogénéité)
3. Norme( $x+y$ )  $\leq$  Norme( $x$ )+Norme( $y$ ) (inégalité triangulaire)

L'inégalité triangulaire peut être comparée au fait que la longueur du côté le plus court d'un triangle est toujours inférieure ou égale à la somme des longueurs des deux autres côtés. Cette propriété est fondamentale pour de nombreuses applications mathématiques.

La fonction Norme( $x$ ) est généralement notée  $\|x\|$

1.  $\|x\| = 0 \Rightarrow x = 0$  (séparation)
2.  $\|\lambda \cdot x\| = |\lambda| \cdot \|x\|$  (homogénéité)
3.  $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$  (inégalité triangulaire)





## Exemples

### 1) Exemples de normes

Les normes suivantes sont fréquemment utilisées, dans les espaces vectoriels normés. Il en existe beaucoup d'autres.

#### 1.1) Norme euclidienne

La norme euclidienne (ou norme  $l_2$ ) est la norme la plus courante. Elle correspond à la distance euclidienne dans un espace de dimension finie. Elle est définie par :

$$\|x\| = \sqrt{(x_1^2 + x_2^2)}$$

où  $x_1$  et  $x_2$  sont les coordonnées de  $x$  dans une base orthonormée.

#### 1.2) Norme $l_p$

La norme  $l_p$  est une généralisation de la norme euclidienne. Elle peut être utilisée dans des espaces de dimension finie ou infinie. Elle est définie par :

$$\|x\| = (\sum x_i^p)^{1/p}$$

où  $p$  est un nombre réel strictement positif.

#### 1.3) Norme de Manhattan

La norme de Manhattan (ou norme  $l_1$ ) correspond à la distance de Manhattan, qui est la somme des distances absolues entre les composantes de  $x$ , c'est-à-dire :

$$\|x\| = \sum |x_i|$$

#### 1.4) Norme de Tchebychev $L_\infty$

La norme de Tchebychev (parfois orthographié Chebyshev), également appelée norme  $L_\infty$ , est une norme utilisée dans l'analyse fonctionnelle pour mesurer la taille d'une fonction. Elle est définie comme suit :

$$\|f\|_\infty = \sup\{ |f(x)| : x \text{ dans le domaine de la fonction} \}$$

où  $f$  est une fonction,  $\|f\|_\infty$  est la norme de  $f$  dans l'espace  $L_\infty$ , et

sup désigne le supremum ou la borne supérieure prise par  $f(x)$ .

La norme de Tchebychev mesure la valeur maximale prise par la fonction dans un domaine donné. Elle est utilisée pour mesurer la plus grande différence entre une fonction  $f_n$  et sa valeur limite  $f$ , dans le cas d'une suite de fonctions.

On mesure alors  $\|f_n - f\|$  qui la norme de la différence entre la fonction  $f_n$  et la fonction limite  $f$ .

La norme de Tchebychev est utile pour caractériser les propriétés de convergence uniforme des suites de fonctions dans les espaces de fonctions continues.

Elle est également utilisée dans la théorie de l'approximation pour mesurer l'erreur maximale commise lorsqu'une fonction est approximée par une autre fonction.

Enfin, la norme de Tchebychev est utilisée en statistiques pour mesurer l'écart maximal entre une distribution de probabilité et sa fonction de répartition empirique.

### 1.5) Norme de Tchebychev $L_1$

La norme de Tchebychev  $L_1$  ou norme de la somme, est une norme utilisée en analyse fonctionnelle. Elle permet de mesurer la "taille" d'une fonction. Elle est définie comme suit :

$$\|f\|_1 = \int |f(x)| dx$$

où  $f$  est une fonction,  $\|f\|_1$  est la norme de  $f$  dans l'espace  $L_1$  et où l'intégrale est prise sur tout le domaine de la fonction.

La norme de Tchebychev  $L_1$  mesure l'intégrale de la valeur absolue de la fonction  $f$  sur le domaine.

La norme de Tchebychev  $L_1$  est utile pour caractériser les propriétés de convergence des suites de fonctions dans les espaces de fonctions intégrables.

Elle est également utilisée dans la théorie de l'approximation pour mesurer l'erreur moyenne commise lorsqu'une fonction est approximée par une autre fonction.

La norme de Tchebychev  $L_1$  ne doit pas être confondue avec la norme de Tchebychev  $L_\infty$  qui mesure la valeur maximale de la valeur absolue de la fonction sur le domaine.

### 1.6) Norme $L^p$

La norme  $L^p$  (à ne pas confondre avec la norme  $l^p$  ci-dessus) est définie sur les espaces de fonctions. Elle correspond à :

$$\|f\|_p = \left( \int_X |f|^p d\mu \right)^{1/p}$$

où  $p \geq 1$  et  $X$  est un espace mesurable avec la mesure  $\mu$ .

### 1.7) Norme de la convergence uniforme

La norme de la convergence uniforme est définie sur les espaces de fonctions continues et correspond à la distance maximale entre la fonction et sa limite.

La convergence uniforme est un concept important en analyse mathématique qui permet de décrire la convergence d'une suite de fonctions.

Plus précisément, on dit qu'une suite de fonctions converge uniformément vers une fonction limite si la différence entre chaque fonction de la suite et la fonction limite est bornée par une même fonction qui tend vers zéro.

La norme de la convergence uniforme est une mesure de cette convergence qui permet de quantifier la rapidité à laquelle la suite de fonctions converge vers la fonction limite. Elle est définie comme la plus petite borne supérieure des différences entre chaque fonction de la suite et la fonction limite, pour tous les points de l'espace de départ.

Plus formellement, si  $f_n(x)$  est une suite de fonctions convergentes uniformément vers  $f(x)$  sur un ensemble  $E$ , alors la norme de la convergence uniforme est définie par :

$$\|f_n - f\| = \sup \{x \in E : |f_n(x) - f(x)|\}$$

où  $\sup$  désigne la borne supérieure et  $|\cdot|$  la valeur absolue.

Cette norme permet de mesurer la "distance" entre la suite de fonctions et la fonction limite. Elle est souvent utilisée pour déterminer la convergence uniforme d'une suite de fonctions. En particulier, si la norme de la convergence uniforme tend vers zéro lorsque  $n$  tend vers l'infini, alors la suite de fonctions converge uniformément vers la fonction limite.



### 1.8) Norme de la convergence en moyenne quadratique

La norme de la convergence en moyenne quadratique est définie sur les espaces de fonctions continues de la façon suivante :

$$\|f_n - f\| = (\int_E |f_n(x) - f(x)|^2 dx)^{1/2}$$

avec  $f_n(x)$  qui est une suite de fonctions convergentes en moyenne quadratique vers  $f(x)$  sur un ensemble E.

### 1.9) Norme de la convergence en moyenne

La norme de la convergence en moyenne est définie sur les espaces de fonctions continues de la façon suivante :

$$\|f_n - f\| = \int_E |f_n(x) - f(x)| dx$$

avec  $f_n(x)$  qui est une suite de fonctions convergentes en moyenne vers  $f(x)$  sur un ensemble E.

## 2) Exemples d'espace vectoriels normés

Les espace vectoriels normés suivants sont fréquemment rencontrés. Il en existe beaucoup d'autres.

- L'espace vectoriel  $\mathbb{R}^n$  :

C'est l'espace des vecteurs constitués de n nombres réels, équipé de la norme euclidienne, également appelée norme L2.

- L'espace vectoriel  $\mathbb{C}^n$  :

C'est l'espace des vecteurs constitués de n nombres complexes, équipé de la norme euclidienne.

- L'espace des fonctions continues sur un intervalle borné  $[a,b]$  : Cet espace est équipé de la norme de la convergence uniforme.

- L'espace des fonctions continues et bornées sur un intervalle borné  $[a,b]$  : Cet espace est équipé de la norme de la convergence uniforme.

- L'espace des suites convergentes : C'est l'espace des suites de nombres réels (ou complexes) qui convergent, équipé de la norme de la convergence en limite.

- L'espace des matrices : C'est l'espace des matrices de taille n

$\times m$ , équipé de la norme de Frobenius.

- L'espace des polynômes : C'est l'espace des polynômes de degré inférieur ou égal à  $n$ , équipé de la norme de la convergence uniforme.

- L'espace des distributions :  
C'est l'espace des fonctions linéaires continues sur l'espace des fonctions tests, équipé de la norme de la convergence en moyenne.

- L'espace des suites de Cauchy convergentes : C'est l'espace des suites de nombres réels (ou complexes) qui sont convergentes au sens de Cauchy, équipé de la norme de la convergence en limite.

- L'espace des séries convergentes : C'est l'espace des séries de nombres réels (ou complexes) qui sont convergentes, équipé de la norme de la convergence en limite.

- L'espace des fonctions intégrables sur un intervalle borné  $[a,b]$   
Cet espace est équipé de la norme  $L^1$ , qui est la norme de la convergence en moyenne.

- L'espace des fonctions de carré intégrable sur un intervalle borné  $[a,b]$  : Cet espace est équipé de la norme  $L^2$ .

- L'espace des suites à décroissance rapide : C'est l'espace des suites de nombres réels (ou complexes) qui décroissent suffisamment rapidement, équipé de la norme de la convergence en limite.

- L'espace des fonctions de classe  $C^k$  sur un intervalle borné  $[a,b]$  : Cet espace est équipé de la norme de la convergence uniforme des dérivées jusqu'à l'ordre  $k$ .

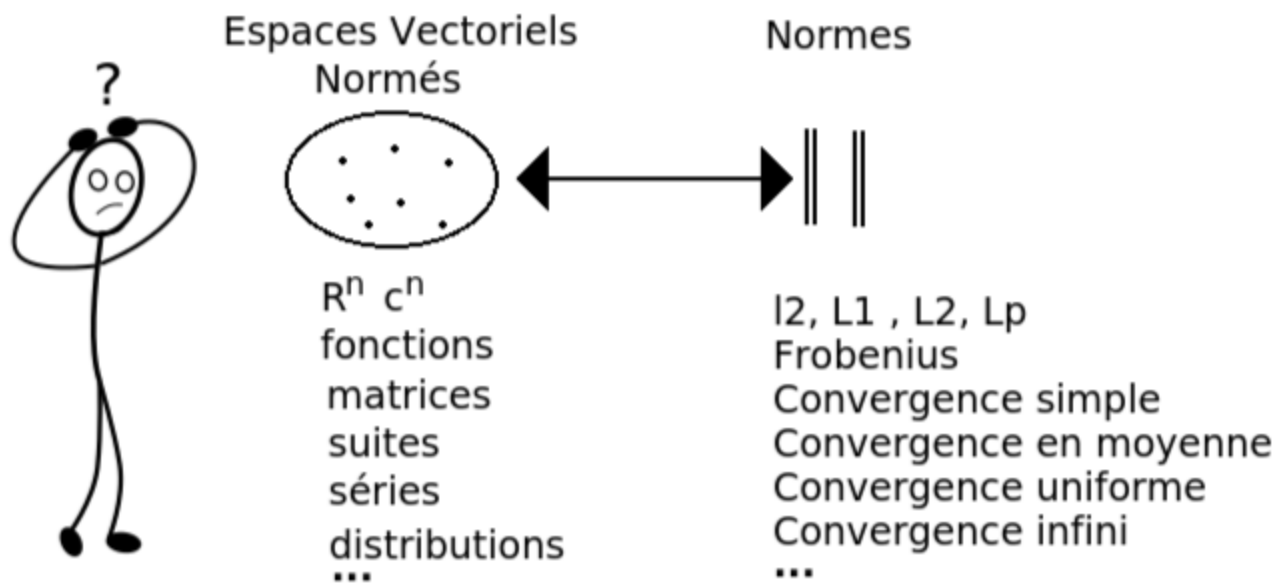
- L'espace des fonctions holomorphes sur un domaine ouvert du plan complexe : Cet espace est équipé de la norme de la convergence uniforme sur des compacts.

- L'espace des séries de Fourier équipé de la norme de la convergence en limite.

- L'espace des fonctions continues à support compact sur un espace topologique : Cet espace est équipé de la norme de la convergence uniforme.

- L'espace des fonctions tempérées : Cet espace est équipé de la norme de la convergence en moyenne sur tout l'espace.

Ces exemples sont utilisés dans de nombreuses branches des mathématiques, de la physique, de l'ingénierie et divers domaines scientifiques. Chacun a ses propres propriétés et caractéristiques distinctes, qui le rendent utile pour des applications spécifiques.



## Questions-réponses

### 1) Convergence en moyenne quadratique

- *Quelle est la différence entre les normes convergence en moyenne et convergence en moyenne quadratique ?*

La convergence en moyenne quadratique et la convergence en moyenne sont des types de convergence pour des suites de fonctions. Elles mesurent la convergence de manière légèrement différente.

Avec la norme de la convergence en moyenne quadratique, une suite de fonctions  $f_n$  converge vers une fonction limite  $f$  si la norme de la différence entre  $f_n$  et  $f$ , c'est-à-dire  $\|f_n - f\|_2$ , tend vers zéro lorsque  $n$  tend vers l'infini. Ici, la norme 2 est la norme euclidienne, qui est définie comme la racine carrée de la somme des carrés des valeurs absolues des fonctions sur l'ensemble de convergence.

Avec la norme de convergence en moyenne, une suite de fonctions  $f_n$  converge vers une fonction limite  $f$  si la norme de la différence entre  $f_n$  et  $f$ , c'est-à-dire  $\|f_n - f\|_1$ , tend vers zéro lorsque

$n$  tend vers l'infini. Ici, la norme 1 est la norme L1, qui est définie comme la somme des valeurs absolues des fonctions sur l'ensemble de convergence.

Ainsi, la différence fondamentale entre convergence en moyenne et convergence en moyenne quadratique réside dans la façon dont elles mesurent la distance entre les fonctions de la suite et la fonction limite. La convergence en moyenne quadratique donne plus de poids aux grandes différences entre les fonctions de la suite et la fonction limite, tandis que la convergence en moyenne accorde une importance égale à toutes les différences entre les fonctions.

En pratique, la convergence en moyenne quadratique est souvent utilisée dans des contextes où des propriétés telles que la régularité ou la continuité des fonctions sont importantes, tandis que la convergence en moyenne est souvent utilisée dans des contextes où les propriétés de sommabilité ou d'intégrabilité des fonctions sont plus importantes.

## 2) Convergence simple ou uniforme

- *Quelle est la différence entre la convergence simple et la convergence uniforme d'une suite de fonctions ?*

La convergence simple et la convergence uniforme sont deux modes de convergence pour une suite de fonctions qui décrivent la manière dont la suite de fonctions se rapproche d'une limite, souvent appelée la fonction limite. La différence fondamentale entre les deux types de convergence est la vitesse à laquelle les fonctions de la suite convergent vers la fonction limite.

La convergence simple est définie comme suit : une suite de fonctions  $f_n$  converge simplement vers une fonction limite  $f$  si, pour tout point  $x$  de l'espace de départ, la suite de nombres réels  $f_n(x)$  converge vers  $f(x)$  lorsque  $n$  tend vers l'infini. Cela signifie que pour chaque  $x$ , la suite  $f_n(x)$  converge vers  $f(x)$ .

En revanche, la convergence uniforme est définie comme suit : une suite de fonctions  $f_n$  converge uniformément vers une fonction limite  $f$  si, pour tout nombre réel  $\epsilon$  positif, il existe un entier  $N$  tel que pour tout  $n$  supérieur ou égal à  $N$  et tout  $x$  de l'espace de départ, la distance entre  $f_n(x)$  et  $f(x)$  est inférieure à  $\epsilon$ , c'est-à-dire que  $\|f_n - f\|_{\text{uniforme}} < \epsilon$  pour tout  $n$  supérieur ou égal à  $N$ .

La différence cruciale entre ces deux modes de convergence est que la convergence uniforme est une convergence plus forte que la convergence simple. En effet, la convergence uniforme implique la convergence simple, mais l'inverse n'est pas nécessairement vrai. En d'autres termes, si une suite de fonctions converge uniformément vers une fonction limite, alors elle converge également simplement vers cette fonction limite. Toutefois, il est possible pour une suite de fonctions de converger simplement vers une fonction limite sans converger uniformément vers cette fonction limite.

La convergence uniforme est souvent préférable à la convergence simple dans les contextes où l'on souhaite obtenir des résultats plus précis sur la limite de la suite de fonctions, car elle garantit que la suite converge uniformément dans tout l'espace de départ, plutôt que seulement en certains points. Cela permet d'obtenir des résultats plus forts et plus précis sur les propriétés de la limite de la suite de fonctions.

### 3) Matrices

- *Quelle est la norme de convergence la plus utilisée dans les espaces vectoriels normés de matrices ?*

Dans les espaces vectoriels normés de matrices, la norme de convergence la plus couramment utilisée est la norme de Frobenius. La norme de Frobenius est également appelée norme L2 ou norme euclidienne, et elle est définie comme la racine carrée de la somme des carrés des éléments de la matrice :

$$\|A\|_{\text{Frobenius}} = \sqrt{\sum_i \sum_j |a_{ij}|^2}$$

où  $A$  est une matrice,  $a_{ij}$  est l'élément de la  $i$ -ème ligne et  $j$ -ème colonne de la matrice, et la somme est prise sur tous les indices  $i$  et  $j$ .

La norme de Frobenius est une mesure naturelle de la taille d'une matrice, car elle correspond à la norme euclidienne dans l'espace vectoriel  $\mathbb{R}^n$ , où  $n$  est le nombre total d'éléments dans la matrice  $A$ . La norme de Frobenius est également très utile pour mesurer la distance entre deux matrices, car elle permet de mesurer la différence élément par élément entre deux matrices.

En outre, la norme de Frobenius possède des propriétés impor-

tantes qui la rendent utile dans de nombreuses applications, telles que l'invariance par rotation et la continuité de l'opérateur norme de Frobenius. Elle est également facile à calculer et à manipuler, ce qui la rend pratique pour les calculs numériques.

#### 4) Convergence en limite

- *Qu'est ce que la convergence en limite ?*

La convergence en limite et la convergence uniforme sont deux termes équivalents qui désignent la même notion de convergence d'une suite de fonctions, de nombres réels ou complexes, ou plus généralement d'une suite d'éléments d'un espace topologique.

On dit qu'une suite  $(x_n)$  converge en limite vers un nombre réel (ou complexe)  $L$ , ou plus généralement vers un élément d'un espace topologique, si pour tout nombre réel (ou complexe) epsilon strictement positif, il existe un entier naturel  $N$  tel que pour tout entier  $n$  supérieur ou égal à  $N$ , l'écart entre  $x_n$  et  $L$  est inférieur à epsilon. On note souvent cette propriété de convergence en utilisant la notation symbolique  $\lim_{n \rightarrow +\infty} x_n = L$ .

Plus précisément, la convergence en limite signifie que la suite  $(x_n)$  se rapproche arbitrairement près de  $L$  à mesure que  $n$  devient suffisamment grand. Autrement dit, pour tout écart positif donné epsilon, il existe un nombre entier  $N$  tel que tous les termes de la suite à partir du terme d'indice  $N$  soient contenus dans un intervalle centré en  $L$  et de rayon epsilon.

La convergence en limite est une notion fondamentale en analyse, car elle permet de définir la continuité, la dérivabilité, l'intégrabilité, etc. pour les fonctions réelles ou complexes, ainsi que pour les fonctions définies sur des espaces plus généraux, tels que les espaces métriques ou topologiques.



## Chapitre 6

# Espace de Banach

► **Ce qu'il faut savoir**

1 - Espace de Banach

2 - Suite de Cauchy

► **Exemples**

► **Questions-réponses**



## Ce qu'il faut savoir

### 1) Qu'est ce qu'un espace de Banach ?

Un espace de Banach est un espace vectoriel normé et complet, c'est à dire un espace vectoriel normé dans lequel toute suite de Cauchy  $(x_n)$  dont les éléments sont dans cet espace converge dans cet espace.

Un espace de Banach  $E$  est dit complet si les suites de Cauchy qui se trouvent dans  $E$  convergent dans  $E$ .

Dans un espace de Banach, toute limite  $x$ , d'une suite de Cauchy dont les éléments  $(x_n)$  se trouvent dans  $E$ , est un élément de  $E$ .

Les espaces de Banach sont utilisés en mathématiques pour modéliser des espaces de fonctions, des espaces de suites et d'autres objets mathématiques.

Les espaces  $(\mathbb{R}, +, \times)$  et  $(\mathbb{C}, +, \times)$  munis de la norme euclidienne sont les espaces de Banach les plus fréquemment rencontrés.

Toute suite de Cauchy située dans  $(\mathbb{R}, +, \times)$  converge vers une limite  $x$  qui se trouve elle aussi dans  $(\mathbb{R}, +, \times)$ .

### 2) Suite de Cauchy

Une suite de Cauchy est une suite  $(x_n)$  dans laquelle les termes  $x_n$  deviennent de plus en plus proches les uns des autres quand  $n$  augmente.

Mathématiquement, cela peut être exprimé ainsi :

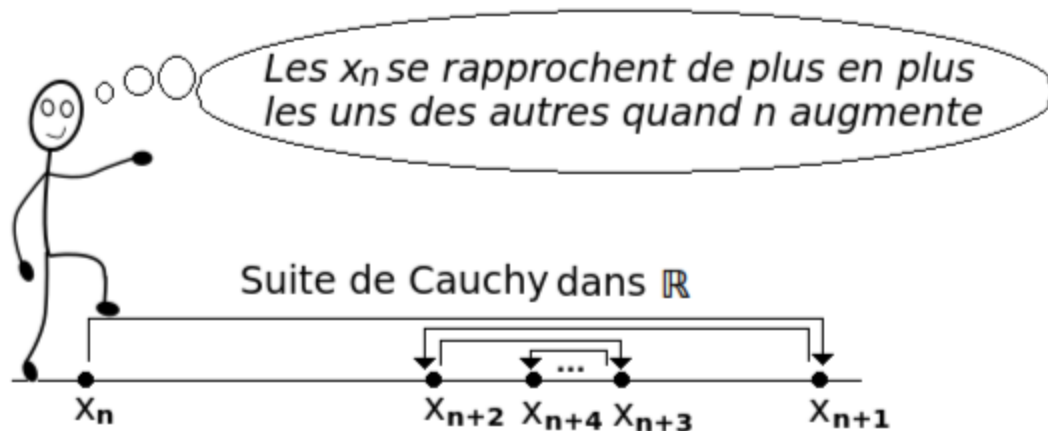
$$\forall \epsilon > 0, \exists N, \text{ tel que pour tout } n, m > N, \|x_m - x_n\| < \epsilon$$

Soit un espace vectoriel normé  $(E, +, \times, \|\cdot\|)$

Une suite  $(x_n)$  de  $E$  est une suite de Cauchy pour la norme  $\|\cdot\|$  si :

$$\forall \epsilon > 0, \exists N \geq 0, \forall n \geq N, \forall p \geq 0, \|x_{n+p} - x_n\| \leq \epsilon$$





## Exemples

### 1) Espaces de Banach

Il existe de nombreux exemples d'espaces de Banach, qui sont largement utilisés en mathématiques, en physique et dans d'autres domaines scientifiques. En voici quelques exemples courants :

#### 1.1) Espaces $\mathbb{R}$ et $\mathbb{C}$

Les espaces  $(\mathbb{R}, +, \times)$  et  $(\mathbb{C}, +, \times)$  munis de la norme euclidienne sont des espaces de Banach.

En effet, ces deux espaces munis de la norme euclidienne sont complets, c'est-à-dire que toute suite de Cauchy converge dans ces espaces, ce qui permet de conclure qu'ils sont des espaces de Banach.

#### 1.2) Espace de Hilbert

Un espace de Hilbert est un espace vectoriel normé complet muni d'un produit scalaire. C'est donc un espace de Banach. Il est utilisé en mathématiques, en physique et dans d'autres domaines pour étudier les propriétés de l'espace euclidien et pour résoudre des problèmes impliquant des fonctions d'ondes et des vecteurs d'état.

#### 1.3) Espace de fonctions continues

Si  $E$  est un ensemble de fonctions continues  $f_n(x)$  sur un intervalle  $I$ , alors  $(E, +, \times, \|\cdot\|)$  est un espace de Banach si et seulement si toute

suite de Cauchy de ces fonctions continues converge uniformément vers une fonction  $f(x)$  qui est continue sur  $I$  et qui appartient à  $E$ .

La norme la plus courante pour un espace de fonctions continues sur un intervalle est la norme sup (dite norme de la convergence uniforme).

Pour une fonction continue  $f$  sur  $I$ , la norme sup de  $f$  est définie par  $\|f\| = \sup\{|f(x)| : x \in E\}$

Un espace de fonctions continues sur un intervalle  $I$ , muni de la norme sup, est souvent noté  $C(I)$ .

La condition supplémentaire de l'appartenance de  $f(x)$  à  $E$  est importante pour assurer que l'espace est complet, c'est-à-dire que toute suite  $f_n(x)$  convergente dans  $E$  converge vers une limite  $f(x)$  qui appartient à  $E$ . En effet, si une suite de Cauchy de fonctions continues  $f_n(x)$  converge uniformément vers une fonction continue  $f(x)$  sur  $I$  mais que  $f(x)$  n'appartient pas à  $E$ , alors l'espace  $(E, \|\cdot\|)$  n'est pas complet et n'est donc pas un espace de Banach.

En résumé, l'espace  $(E, \|\cdot\|)$  des fonctions continues définies sur un intervalle  $I$  muni de la norme de la convergence uniforme est un espace de Banach si et seulement si toute suite de Cauchy, de fonctions continues de  $E$  sur  $I$ , converge uniformément vers une fonction continue  $f$  sur  $I$  qui appartient à  $E$ .

#### **1.4) Espace de fonctions intégrables**

Pour savoir si un espace  $E$  de fonctions intégrables  $f_n(x)$  est un espace de Banach, on doit vérifier (à l'aide de la convergence en norme) que toute suite de Cauchy  $(f_n(x))$  de ces fonctions converge vers une fonction  $f(x)$  intégrable dans  $E$ . Si tel est le cas, alors l'espace  $E$  de ces fonctions intégrables  $f_n(x)$  est un espace de Banach.

#### **1.5) Espace de Sobolev**

Un espace de Sobolev est un espace vectoriel normé complet de fonctions dérivables de plusieurs ordres définies sur un domaine de dimension finie ou infinie. Il peut sous certaines conditions (régularité des fonctions, choix de la norme, conditions aux limites) être un espace de Banach.

#### **1.6) Espace de Lebesgue**

Un espace de Lebesgue est un espace de fonctions mesurables définies sur un espace de mesure donné. Il peut sous certaines

conditions (régularité des fonctions) être un espace de Banach.

Les fonctions doivent être "suffisamment régulières" pour que la norme associée à l'espace de Lebesgue soit complète, ce qui est une condition nécessaire pour être un espace de Banach. Par exemple, si les fonctions sont continues sur l'espace de mesure, alors l'espace de Lebesgue est un espace de Banach.

### **1.7) Espace de polynômes**

Un espace de polynômes  $P_n(x)$  n'est pas toujours un espace de Banach.

Cela dépend de la norme choisie sur l'espace de polynômes. Par exemple, un espace de polynômes avec la norme supérieure n'est pas complet et donc n'est pas un espace de Banach. Cependant, si on utilise une autre norme, comme la norme  $L_2$ , alors un espace de polynômes devient complet et est donc un espace de Banach.

### **1.8) Espace de distributions**

Un espace de distributions est un espace de fonctions généralisées, qui sont utilisés pour étudier les propriétés de fonctions qui ne sont pas définies partout ou qui ne sont pas dérivables dans un sens classique.

Les espaces de distributions sont utilisés en analyse fonctionnelle et en théorie des équations aux dérivées partielles.

Un espace de distributions  $d_n(x)$  n'est pas toujours un espace de Banach car il est difficile de définir une norme qui permette de mesurer la taille de chaque distribution de manière satisfaisante. Cependant, il est possible de considérer des sous-ensembles d'espaces de distributions qui sont des espaces de Banach, tels que les espaces de distributions tempérées.

Les distributions tempérées sont une généralisation des fonctions régulières (fonctions infiniment dérivables et qui décroissent rapidement à l'infini).

### **1.9) Espace de fonctions holomorphes**

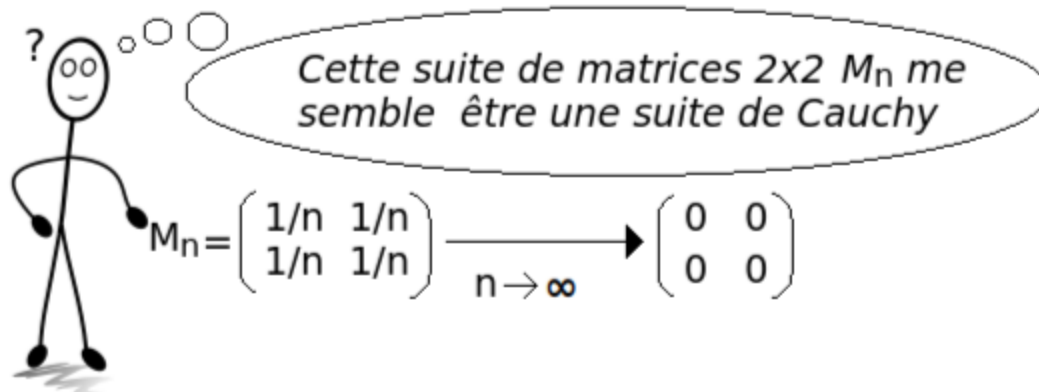
Un espace de fonctions holomorphes  $f_n(z)$  (fonctions définies sur des ensembles ouverts de l'espace complexe) qui est complet pour la norme sup est un espace de Banach.

### 1.10) Espace de fonctions de classe Lipschitz

Un espace de fonctions de classe Lipschitz (fonctions définies sur un ensemble donné et satisfaisant certaines conditions de régularité et de continuité) peut être un espace de Banach (selon la norme choisie)

### 1.11) Espace de matrices carrés

Un espace  $X$  de matrices carrés ( $M_n$ ) peut être un espace de Banach, si toutes les suites de Cauchy de ces matrices convergent dans  $X$  avec la norme choisie. Cela dépend de la norme choisie.



### 1.12) Espaces de matrices rectangulaires

Un espace  $X$  de matrices rectangulaires peut être un espace de Banach, si toutes les suites de Cauchy de ces matrices convergent dans  $X$  avec la norme choisie. Cela dépend de la norme choisie.

Ces exemples ne sont pas exhaustifs, mais ils montrent la diversité des espaces de Banach et leur utilité dans de nombreux domaines mathématiques et scientifiques.

## 2) Suites de Cauchy

Il existe de nombreux exemples de suites de Cauchy dans divers espaces (de Banach ou non). La liste suivante n'est pas exhaustive.

### 2.1) Dans $\mathbb{R}$

Dans l'espace des nombres réels  $\mathbb{R}$ , la suite  $x_n = 1/n$  est une suite de Cauchy.

**2.2) Dans  $\mathbb{Q}$** 

Dans l'espace des nombres rationnels  $\mathbb{Q}$ , la suite  $x_n = 1 + 1/2 + \dots + 1/n - \log(n)$  est une suite de Cauchy.

**2.3) Dans des espaces de fonctions**

Dans l'espace des fonctions continues sur  $[0,1[$ , la suite  $f_n(x) = x^n$  est une suite de Cauchy.

Dans l'espace des polynômes de degré au plus  $n$  sur l'intervalle  $[0,1[$ , la suite  $p_n(x) = x^n$  avec  $n \geq 0$  est une suite de Cauchy.

Dans l'espace des fonctions continues sur  $[0,1]$  muni de la norme  $L^\infty$ , la suite  $f_n(x)_{n \geq 0}$  définie par  $g_n(x) = \sin(nx)$  est une suite de Cauchy.

Dans l'espace  $L^1([0,1])$  des fonctions intégrables sur  $[0,1]$ , la suite  $f_n(x)_{n \geq 0}$  définie par  $f_n(x) = x^n$  est une suite de Cauchy.

Ces exemples montrent que les suites de Cauchy peuvent apparaître dans une grande variété d'espaces métriques, et que leur convergence dépend de la structure de l'espace considéré

 **Questions-réponses**


---

**1) Espace complet**

- *Qu'est ce qu'un espace complet?*

Un espace métrique complet est un espace métrique dans lequel toutes les suites de Cauchy convergent. Autrement dit, un espace métrique complet est un espace où il n'y a pas de «trous» ou de «lacunes» : toutes les suites qui se rapprochent les unes des autres convergent vers une limite dans l'espace.

**2) Suites de Cauchy**

- *Est-ce que toute suite de Cauchy est convergente?*

Non, toute suite de Cauchy n'est pas nécessairement conver-

gente dans l'espace où elle évolue. Cependant, dans un espace complet, toute suite de Cauchy est convergente dans l'espace où elle évolue.

Dans un espace métrique complet, comme  $\mathbb{R}$  ou  $\mathbb{C}$  munis de la distance usuelle, une suite est convergente si, et seulement si, c'est une suite de Cauchy.

Cependant, dans un espace métrique  $E$  qui n'est pas complet, il est possible d'avoir des suites de Cauchy qui ne convergent pas dans  $E$ .

Par exemple, l'espace  $\mathbb{R}$  des nombres rationnels équipé de la distance usuelle est un espace métrique, mais il n'est pas complet. On peut ainsi construire une suite de Cauchy de nombres rationnels qui ne converge pas vers un nombre rationnel.

Dans un espace de Banach, qui est un espace vectoriel normé et complet, toute suite de Cauchy converge vers un élément de l'espace. C'est l'une des propriétés clés des espaces de Banach qui les distingue des espaces vectoriels normés qui ne sont pas complets.

En revanche, dans un espace vectoriel normé qui n'est pas complet, une suite de Cauchy peut ne pas avoir de limite dans cet espace.

Par exemple, dans l'espace des fonctions continues sur un intervalle donné avec la norme de la convergence uniforme, la suite de fonctions définie par  $f_n(x) = x^n$  est une suite de Cauchy, mais elle ne converge pas toujours dans cet espace.

En somme, la convergence d'une suite de Cauchy dépend de la nature de l'espace dans lequel elle est définie et de la complétude de cet espace.

- *Est-ce que toute suite convergente est de Cauchy ?*

Dans un espace de Banach, toute suite convergente est une suite de Cauchy. Cela signifie que si une suite  $(x_n)$  converge vers une limite  $x$  dans un espace de Banach  $E$ , alors cette suite est de Cauchy.

Cependant, cette propriété ne s'applique pas à tous les espaces vectoriels normés. Il existe des espaces vectoriels normés dans lesquels il existe des suites convergentes qui ne sont pas des suites de Cauchy.

En résumé, dans un espace de Banach, toute suite convergente est de Cauchy, mais cette propriété ne s'applique pas nécessairement à tous les espaces vectoriels normés.

### 3) Normes

• *Quelles sont les principales normes rencontrées dans des espaces de Banach ?*

Il existe de nombreuses normes qui peuvent être utilisées pour définir des espaces de Banach, mais certaines d'entre elles sont plus courantes ou plus importantes que d'autres en mathématiques.

Voici quelques exemples de normes rencontrées dans des espaces de Banach :

- La norme euclidienne ou norme  $l^2$  : cette norme est définie pour un vecteur  $x = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$  dans un espace de Banach de dimension finie  $n$  par :

$$\|x\| = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2}$$

Elle est souvent utilisée dans l'étude des espaces de Hilbert, qui sont des exemples importants d'espaces de Banach.

- La norme de la convergence uniforme : cette norme est définie pour une suite  $(f_n(x))$  de fonctions continues sur un ensemble  $X$  par :

$$\|f_n(x)\| = \sup\{|f_n(x)| : x \in X\}$$

Elle est couramment utilisée dans l'étude des espaces de fonctions continues ou de fonctions holomorphes.

- La norme de la convergence en moyenne : cette norme est définie pour une suite  $(f_n(x))$  de fonctions intégrables sur un ensemble  $X$  avec mesure  $\mu$  par :

$$\|f_n(x)\| = (1/\mu(X)) \int f_n(x) d\mu(x)$$

La norme  $L^1$  définie par  $\|f\|_1 = \int_E |f(x)| dx$ .

- La norme  $L^2$  définie par  $\|f\|_2 = \sqrt{\int_E |f(x)|^2 dx}$ .

- La norme  $L^p_w$  définie pour les espaces de fonctions pondérées et est définie par  $\|f\|_{p,w} = \left(\int_E |f(x)|^p w(x) dx\right)^{\frac{1}{p}}$ , où  $w(x)$  est une fonction poids donnée.

Ces normes sont également importantes dans certains domaines des mathématiques et de la physique. Le choix de la norme dépend souvent de la structure de l'espace étudié et du contexte de l'application.





## Chapitre 7

# Espace de Hilbert

► **Ce qu'il faut savoir**

- 1 - Qu'est ce qu'un espace de Hilbert?
- 2 - Produit scalaire
- 3 - Norme

► **Exemples**

► **Questions-réponses**



## Ce qu'il faut savoir

### 1) Qu'est ce qu'un espace de Hilbert ?

Un espace de Hilbert  $H$  est un espace vectoriel normé complet doté d'un produit scalaire et dont la norme est déduite de ce produit scalaire.

Un espace de Hilbert  $H$  est donc un espace de Banach doté d'un produit scalaire et dont la norme est déduite de ce produit scalaire.

Un espace vectoriel normé  $(H, \|\cdot\|)$  sur  $\mathbb{R}$  ou sur  $\mathbb{C}$  est de Hilbert si sa norme provient d'un produit scalaire et s'il est complet.

Un espace de Hilbert  $H$  sur  $\mathbb{C}$  contient des éléments  $z$  qui peuvent s'écrire sous la forme :

$$z = x + iy \in \mathbb{C} \text{ avec } x \text{ et } y \in \mathbb{R}$$

$$\bar{z} = x - iy \text{ est le conjugué de } z$$

### 2) Produit scalaire

Soit  $H$  un espace vectoriel complexe, c'est à dire un espace vectoriel sur le corps  $\mathbb{C}$ .

Un produit scalaire est une application de  $H \times H$  dans  $\mathbb{C}$  notée :

$$\langle \cdot, \cdot \rangle : H \times H \rightarrow \mathbb{C}$$

Remarque : Si  $H$  est un espace vectoriel réels (espace vectoriel dont les éléments appartiennent à  $\mathbb{R}$ ), le produit scalaire est noté :

$$\langle \cdot, \cdot \rangle : H \times H \rightarrow \mathbb{R}$$

Le produit scalaire vérifie pour tous  $f, g, h$  appartenant à  $H$  et tout  $a$  appartenant à  $\mathbb{C}$

$$1. \langle g, f \rangle = \overline{\langle f, g \rangle}$$

$$2. \langle f + g, h \rangle = \langle f, h \rangle + \langle g, h \rangle$$

$$3. \langle af, g \rangle = a \langle f, g \rangle \text{ et } \langle f, ag \rangle = \bar{a} \langle f, g \rangle$$

$$4. \langle f, f \rangle \in \mathbb{R}^+$$

$$5. \langle f, f \rangle = 0 \Rightarrow f = 0$$

### 3) Norme

Dans un espace de Hilbert, la norme est déduite du produit scalaire.

Grâce à la propriété 4. ci dessus, on peut définir la norme d'un élément  $f$  d'un espace de Hilbert  $F$  par :

$$\|f\| = \sqrt{\langle f, f \rangle}$$

L'application de  $H$  dans  $\mathbb{R}$  définie par  $\|f\| = \sqrt{\langle f, f \rangle}$  est appelée norm induite (du produit scalaire).

L'espace de Hilbert peut être noté :  $(H, +, -, \|\cdot\|, \langle \cdot, \cdot \rangle)$  avec :

- $+$  : opération interne dans  $H$
- $-$  : opération externe sur  $\mathbb{C}$
- $\|\cdot\|$  : norme dans  $H$
- $\langle \cdot, \cdot \rangle$  : produit scalaire dans  $H$



## Exemples

Il existe de nombreux exemples d'espaces de Hilbert. Les exemples suivants sont souvent rencontrés (liste non exhaustive).

### 1) Espace L2 de fonctions intégrables au carré

Un espace L2 de fonctions intégrables au carré sur un intervalle donné est un espace de Hilbert, noté  $L^2([a, b])$ , où  $[a, b]$  est un intervalle borné de la droite réelle.

Les fonctions dans cet espace sont des fonctions mesurables qui sont carré-intégrables, c'est-à-dire que la valeur absolue de la fonction au carré est intégrable sur l'intervalle  $[a, b]$ .

Le produit scalaire sur cet espace est défini par l'intégrale de la multiplication des deux fonctions, et la norme correspondante est la racine carrée de ce produit scalaire appliqué à la fonction elle-même.

Plus précisément, si  $f$  et  $g$  sont deux fonctions de  $L^2([a, b])$ , leur produit scalaire est défini par :

$$\langle f, g \rangle = \int_{[a,b]} f(x)g(x)dx$$

et leur norme est définie par :

$$\|f\| = \sqrt{\langle f, f \rangle}$$

Cet espace de Hilbert a de nombreuses applications dans les mathématiques et les sciences, en particulier en analyse fonctionnelle, en théorie des probabilités et en traitement du signal. Par exemple, l'espace  $L^2$  est utilisé pour modéliser des signaux numériques, tels que des images ou des sons, en vue de les analyser ou de les traiter numériquement.

## 2) Espace de suites de nombres carré sommables

Un espace de suites de nombres (réels ou complexes) qui sont carré sommables, muni du produit scalaire défini par la somme pondérée est un exemple d'espace de Hilbert. Cet espace est défini comme suit :

$$H = \{x = (x_1, x_2, x_3, \dots)\} \text{ avec :}$$

$x_i$  nombres réels ou complexe, et

$$\sum |x_i|^2 \text{ série convergente}$$

La norme d'une suite  $(x)$  de  $H$  est définie par :

$$\|x\| = \sqrt{\sum |x_i|^2}$$

Le produit scalaire entre deux suites  $x = (x_1, x_2, x_3, \dots)$  et  $y = (y_1, y_2, y_3, \dots)$  dans cet espace est défini par :

$$\langle x, y \rangle = \sum x_i \times \bar{y}_i \quad \text{où } \bar{y}_i \text{ est le conjugué du nombre complexe } y_i$$

La série ci-dessus converge absolument pour toutes les suites  $x$  et  $y$  appartenant à  $H$ , et la propriété de sommabilité garantit que le produit scalaire est bilinéaire, symétrique et positif.

Cet espace de Hilbert est utilisé dans diverses branches des mathématiques, telles que l'analyse fonctionnelle, la théorie des opérateurs, la théorie de l'information, la théorie des probabilités et la théorie des ondelettes.

En particulier, il est utilisé pour étudier les séries de Fourier et

les séries de Taylor, ainsi que pour définir des espaces de Hilbert de fonctions mesurables sur un espace topologique.

### 3) Espace de séries de Fourier

L'espace des fonctions  $f(x)$  qui sont périodiques avec une période  $T$  et qui sont intégrables au carré sur une période  $T$  est un exemple d'espace de Hilbert, noté  $L^2([0, T])$

Cet espace de Hilbert  $L^2([0, T])$  est muni du produit scalaire défini par :

$$\langle f, g \rangle = (1/T) \int_0^T f(x)g(x)dx$$

où  $f$  et  $g$  sont deux fonctions périodiques de période  $T$ .

Les séries de Fourier d'une fonction périodique  $f(x)$  peuvent être représentées par une somme pondérée de fonctions sinusoïdales et cosinusoidales.

$$f(x) = a_0 + \sum_{n=1}^{+\infty} a_n \cos(n\pi x/T) + b_n \sin(n\pi x/T)$$

où  $a_0$ ,  $a_n$  et  $b_n$  sont les coefficients de Fourier de  $f(x)$ , qui sont donnés par les formules suivantes :

$$a_0 = (1/T) \int_0^T f(x)dx$$

$$a_n = (2/T) \int_0^T f(x) \cos(n\pi x/T) dx$$

$$b_n = (2/T) \int_0^T f(x) \sin(n\pi x/T) dx$$

L'espace de Hilbert  $L^2([0, T])$  est utilisé pour étudier les propriétés des séries de Fourier, telles que la convergence uniforme et la convergence en moyenne quadratique.

Il est également utilisé pour l'analyse de signaux périodiques dans divers domaines, tels que la théorie de la communication et le traitement du signal.

### 4) Espace des polynômes de degré au plus $n$

L'espace  $H$  des polynômes de degré au plus  $n$  avec des coefficients complexes, muni du produit scalaire usuel est un espace de

Hilbert,

Cet espace est constitué de tous les polynômes  $p(x)$  avec des coefficients complexes de degré au plus  $n$ .

Le produit scalaire usuel de deux polynômes  $p(x)$  et  $q(x)$  est défini par :

$$\langle p, q \rangle = \sum_{k=0}^n p_k \times \overline{q_k}$$

où  $p_k$  est le coefficient de degré  $k$  dans le polynôme  $p(x)$  et  $\overline{q_k}$  est le conjugué complexe du coefficient  $q_k$ .

La norme de  $p(x)$  est définie par :

$$\|p\| = \sqrt{\langle p, p \rangle}$$

Cet espace de Hilbert est utilisé en analyse numérique pour l'approximation de fonctions continues par des polynômes.

Les polynômes de degré  $n$  sont utilisés pour approximer des fonctions continues sur des intervalles donnés, et la norme de cet espace de Hilbert est utilisée pour mesurer l'erreur d'approximation.

Cet espace de Hilbert est également utilisé en théorie des codes correcteurs d'erreur et en théorie de la complexité pour l'analyse de l'efficacité des algorithmes polynomiaux.

## 5) Espace des distributions tempérées

L'espace de Hilbert des distributions tempérées est un espace de Hilbert particulier, noté  $S'$ . Il est constitué de toutes les distributions tempérées sur  $\mathbb{R}$ , c'est-à-dire les distributions linéaires continues dont le support est inclus dans un compact et qui sont dérivables d'ordre fini.

La notion de distribution est une généralisation des fonctions et permet de manipuler des objets mathématiques plus généraux, tels que les distributions singulières ou les fonctions généralisées.

Les distributions tempérées sont des distributions qui varient "modérément" à l'infini, et sont donc particulièrement utiles en analyse harmonique et en physique mathématique.

Le produit scalaire de deux distributions tempérées  $f$  et  $g$  dans l'espace de Hilbert  $S'$  sur le corps  $\mathbb{C}$  est défini par :

$$\langle f, g \rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) \times \overline{g(x)} dx$$

où  $\overline{g(x)}$  est le conjugué complexe de la distribution  $g(x)$ .

La norme de la distribution tempérée  $f$  est définie par :

$$\|f\| = \sqrt{\langle f, f \rangle} = \sqrt{\int_{-\infty}^{+\infty} |f(x)|^2 dx}$$

L'espace de Hilbert des distributions tempérées est utilisé en physique pour la formulation mathématique de la théorie quantique des champs.

Il est également utilisé en analyse harmonique pour l'étude des fonctions généralisées et des opérateurs différentiels.

## Questions-réponses

### 1) Espace pré-hilbertien

- *Qu'est ce qu'un espace pré-hilbertien ?*

Un espace préhilbertien est un espace vectoriel réel ou complexe muni d'un produit scalaire, mais qui ne satisfait pas nécessairement tous les axiomes de la définition d'un espace de Hilbert complet.

Plus précisément, un espace préhilbertien est un espace vectoriel  $E$  muni d'un produit scalaire  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  qui vérifie les propriétés suivantes :

1.  $\langle x, y \rangle = \overline{\langle y, x \rangle}$  pour tout  $x, y$  dans  $E$
2.  $\langle x, x \rangle \geq 0$  pour tout  $x$  dans  $E$
3.  $\langle x, x \rangle = 0$  si et seulement si  $x=0$

Cependant, contrairement à un espace de Hilbert complet, un espace préhilbertien peut ne pas être complet.

Cela signifie qu'il peut exister des suites de Cauchy de vecteurs qui ne convergent pas dans l'espace lui-même.

## 2) Produit hermitien

### • Qu'est ce qu'un produit hermitien ?

Un produit hermitien est un type de produit scalaire défini sur un espace vectoriel complexe. Le produit hermitien généralise le concept de produit scalaire dans les espaces vectoriels réels.

Formellement, un produit hermitien sur un espace vectoriel complexe  $V$  est une fonction bilinéaire conjuguée-symétrique :

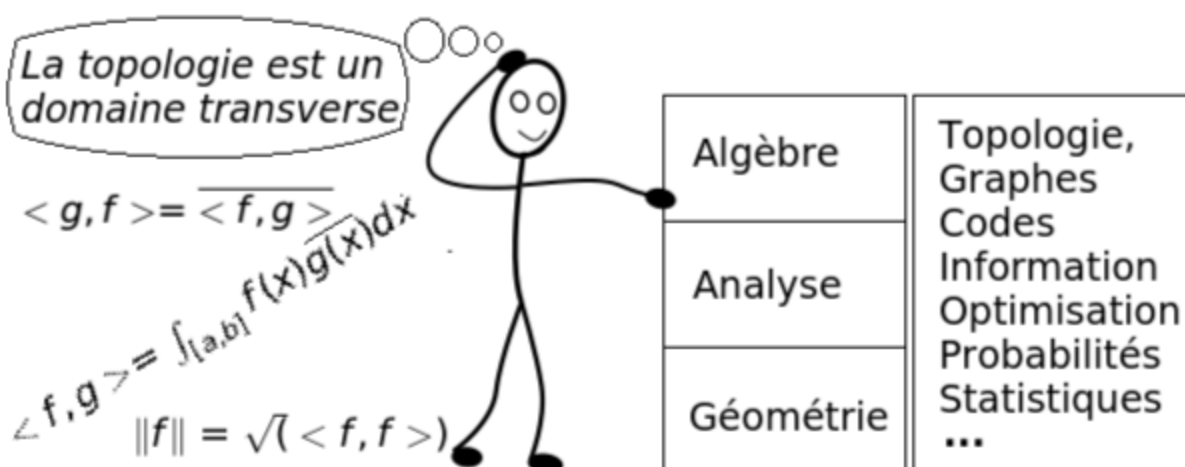
$$\langle \cdot, \cdot \rangle : V \times V \rightarrow \mathbb{C}$$

qui satisfait les propriétés suivantes pour tout  $x, y, z$  dans  $V$  et tout scalaire complexe  $\lambda$  :

1.  $\langle x, y \rangle = \overline{\langle y, x \rangle}$
2.  $\langle \lambda x, y \rangle = \lambda \langle x, y \rangle$
3.  $\langle x + y, z \rangle = \langle x, z \rangle + \langle y, z \rangle$
4.  $\langle x, x \rangle \in \mathbb{R}^+$
5.  $\langle x, x \rangle = 0$  si et seulement si  $x = 0$

Le produit hermitien est souvent noté sous forme de notation de Dirac  $\langle x|y \rangle$ , où  $\langle x|y \rangle$  représente le produit hermitien entre les vecteurs  $x$  et  $y$ .

Le produit hermitien est utilisé en mathématiques pour définir des espaces de Hilbert, des opérateurs hermitiens et autoadjoints, et des matrices hermitiennes et autoadjointes. En physique théorique, il est utilisé pour décrire des systèmes quantiques tels que des particules subatomiques et des états quantiques.





### 3) Produit hermitien - Produit scalaire

- *Quand utilise t'on le produit hermitien à la place du produit scalaire ?*

Dans un espace de Hilbert sur le corps  $\mathbb{R}$ , on utilise le produit scalaire. Dans un espace de Hilbert sur le corps  $\mathbb{C}$ , on utilise le produit hermitien.

Le produit scalaire hermitien est utilisé dans plusieurs contextes mathématiques lorsque l'on travaille avec des espaces vectoriels complexes.

Voici quelques exemples où l'on utilise le produit scalaire hermitien au lieu du produit scalaire classique :

1) Dans les espaces de Hilbert complexes  $L^2(X)$

Dans les espaces de Hilbert complexes où  $X$  est un ensemble mesurable, il est souvent plus naturel de travailler avec le produit scalaire hermitien, car il permet de traiter les fonctions complexes de manière adéquate.

Le produit scalaire hermitien est défini par :

$$\langle f, g \rangle = \int f(x) \overline{g(x)} dx$$

où  $\overline{g(x)}$  désigne le conjugué complexe de  $g(x)$ .

2) En théorie quantique

En théorie quantique, les vecteurs d'état des systèmes physiques sont des vecteurs complexes, et le produit scalaire entre deux vecteurs d'état est défini comme un produit scalaire hermitien. Cela permet de traiter les fonctions d'onde complexes qui décrivent les états quantiques des particules de manière naturelle.

3) En traitement du signal

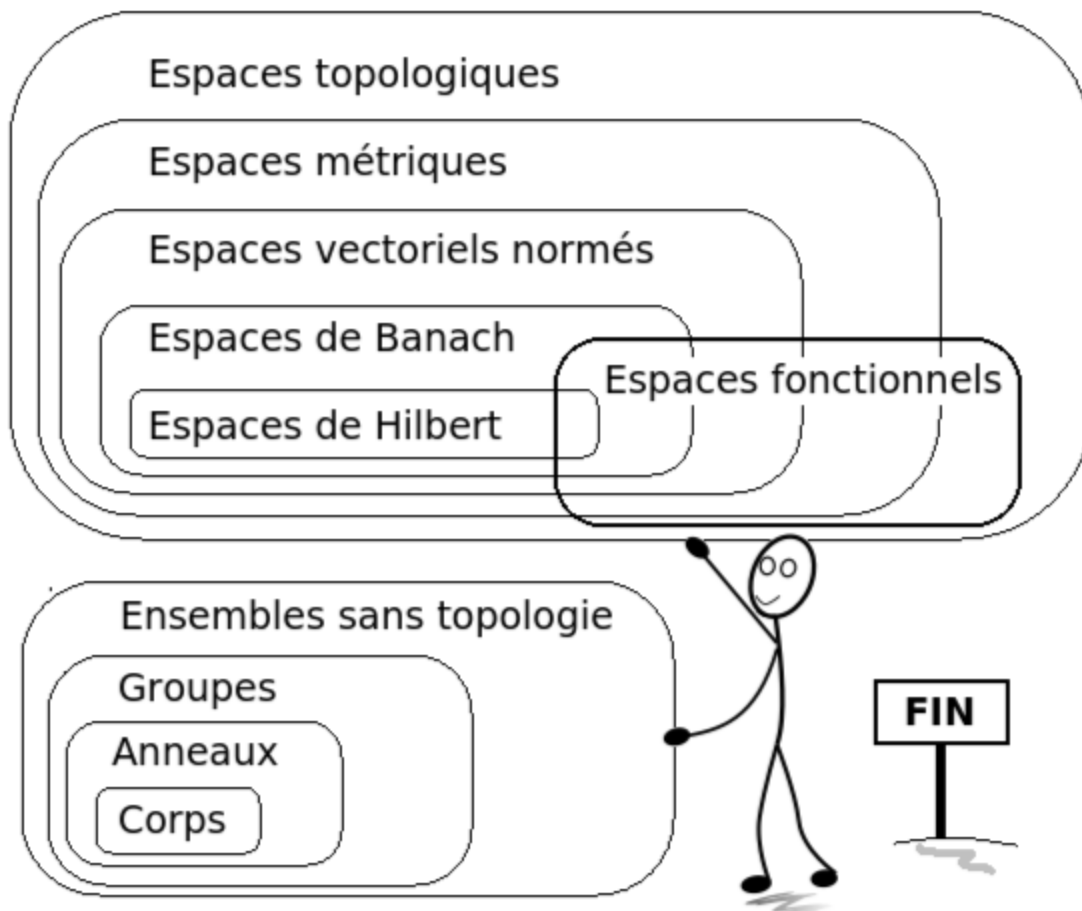
Le produit scalaire hermitien est utilisé dans le traitement du signal pour définir des filtres complexes, tels que les filtres à réponse impulsionnelle finie (FIR) et les filtres à réponse impulsionnelle infinie (IIR).

En résumé, le produit scalaire hermitien est utilisé lorsque l'on travaille avec des espaces vectoriels complexes, tels que les espaces de Hilbert complexes, en raison de sa compatibilité naturelle avec les nombres complexes et les fonctions complexes.

## 4) Orthogonalité

- *Qu'est ce que l'orthogonalité dans un espace de Hilbert ?*

L'orthogonalité est une notion fondamentale dans les espaces de Hilbert. Dans un espace de Hilbert, deux vecteurs sont dits orthogonaux s'ils sont perpendiculaires, c'est-à-dire s'ils ont un produit scalaire nul.



# Index

## A

adhérence 25, 28, 30, 33, 36, 44  
angle 34, 58  
application bilinéaire 34  
associativité 60

## B

base topologique 18  
borné 40  
borne supérieure 62, 64  
boule ouverte 13, 21, 32, 46

## C

$\mathbb{C}$ ,  $\mathbb{C}^n$  60, 65, 72, 73, 82  
carré ouvert 13  
collection 47  
commutativité 60  
compacité 45, 47  
compact 39, 40, 45  
complémentaire 31, 33  
complet 72, 78  
complétude 57  
conjugué 82, 87  
connexe 40  
connexe 46  
connexité 41  
connexité 46  
continuité 47  
continuité uniforme 48  
convergence 46, 47, 50  
convergence en limite 70

convergence en moyenne 65, 67, 79  
convergence faible 50  
convergence simple 68  
convergence uniforme 13, 62, 64, 68, 73, 79  
corps 60  
croissant 40

## D

dense 39, 44  
densité 39  
disjoint 41, 46  
distance 34, 47, 51, 56  
distance triviale 54  
distance uniforme 14, 16  
distributivité 60  
distribution 50  
distribution tempérée 85  
domaine 21

## E

élément inverse 60  
élément neutre 60  
espace compact 39  
espace complet 77  
espace de Banach 42, 47, 48, 51, 53, 57, 58, 71, 78, 79, 82  
espace de distributions 50, 54, 66, 75, 85  
espace de fonctions 48, 66, 73  
espace de fonctions 48, 53, 55, 57, 62, 65, 66, 75, 76, 78, 83  
espace de géométrie 54  
espace de graphes 53  
espace de Hilbert 42, 47, 48, 51, 53, 58, 73, 81, 89  
espace de Lebesgue 54, 74  
espace de matrices 53, 57, 65, 76  
espace de polynômes 53, 66, 74, 85  
espace de séries 66  
espace de séries de Fourier 54, 85  
espace de Sobolev 54, 74  
espace de suites 48, 53, 54, 57, 58, 65, 66, 84  
espace discret 54  
espace discret 21, 43, 44, 45, 46  
espace euclidien 21, 22, 34, 43, 44, 45, 46, 53  
espace fonctionnel 49, 50

espace mesurable 64  
espace métrique 42, 46, 47, 48, 49, 50, 51, 56, 78  
espace pré-hilbertien 87  
espace produit 21  
espace quotient 21  
espace séparé 17  
espace topologique 4, 41, 42, 47, 48, 49  
espace trivial 21  
espace vectoriel 42, 47  
espace vectoriel normé 48, 49, 56, 57, 59, 60, 65, 72, 78  
extérieur 22, 24, 25, 36

## F

famille 40, 43, 45, 50  
fermé 8, 21, 23, 30, 35, 44  
fonction bilinéaire 48, 88  
fonction continue 8, 15, 21, 55, 74  
fonction limite 62, 68  
fonction linéaire 50  
fonction test 50  
Frobenius 69 frontière 25, 33, 36

## H

Hausdorff 38  
Heine-Borel 40, 45  
hermitien 88  
homogénéité 57, 60

## I

inégalité triangulaire 46, 47, 52, 56, 57, 60  
intérieur 24, 35  
intersection 20, 22, 33, 38  
intervalle 12, 21, 23, 30, 32, 33, 40, 43, 45

## L

$L^2, l^2$  58, 69, 83, 85

## M

matrice 69  
mesure 64  
métrique 46, 56

moyenne quadratique 65, 67

## N

$\mathbb{N}$  45

nombre algébrique 44

nombres irrationnels 23

nombres rationnels 31, 32

nombres réels 32

norme 34, 47, 56, 57, 60, 64, 65, 79, 82, 83, 84, 85

norme de Manhattan 62

norme de Tchebychev 62, 63

norme euclidienne 34, 62, 79

norme infinie 15, 16

norme  $\mathbb{L}^\infty$  63

norme  $\mathbb{L}^1$  63, 79

norme  $\llcorner^2$  79

norme  $\mathbb{L}^p$   $l_p$  62, 64, 80

norme sup 73

## O

opération externe 83

opération interne 83

orthogonalité 48, 90

ouvert 8, 13, 17, 20, 21, 23, 35, 39, 42, 43, 44, 45, 46

ouverture 24

## P

partie ouverte 40

partition 40, 46

point d'accumulation 27

point d'adhérence 27

point limite 27

polynôme 44

pré-hilbertien 87

produit hermitien 88, 89

produit scalaire 9, 34, 48, 58, 82, 84, 85, 88, 89

projection orthogonale 58

## Q

$\mathbb{Q}$  31, 32, 39, 44

# R

$\mathbb{R}$ ,  $\mathbb{R}^n$  15, 27, 32, 34, 39, 40, 42, 44, 54, 65, 72, 73  
recouvrement 38, 43, 45

# S

scalaire 60  
séparation 38, 41, 52, 60  
séparé 17, 38, 40, 41, 42  
singleton 21, 45  
sous-ensemble 43, 44  
sous-recouvrement 39  
suite 45, 50  
suite convergente 32, 47, 78  
suite de cauchy 48, 57, 72, 73, 76, 77, 87  
suite de fonctions 62, 64, 68, 78  
suite décimale 44  
supremum 62v symétrie 47, 52, 56

# T

topologie 8, 47, 50, 56  
topologie de la norme 9  
topologie discrète 28, 29, 35, 41  
topologie discrète 9, 11  
topologie euclidienne 9, 16  
topologie grossière 12, 16  
topologie induite 40  
topologie métrique 9  
topologie quotient 9  
topologie triviale 9  
topologie usuelle 9, 12, 16  
topologie usuelle 29, 35

# U

union 20, 22, 33, 38

# V

valeur absolue 15  
vecteur 34, 47, 56, 58, 60  
voisinage 27, 30, 38